বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ
(Polynomials and Polynomial Equations)

ভূমিকা

বহুপদী এক ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে। বহুপদীর বিভিন্ন পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল দ্বারা গঠিত। এই ইউনিটে বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বহুপদী কী তা ব্যাখ্যা করতে ও তার ঘাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- পৃথায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করতে পারবেন,
- মূল দেওয়া থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধানের আসন্নমান নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২৫ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৩.১: বহুপদী ও তার ঘাত
পাঠ ৩.২:বহুপদী সমীকরণ
পাঠ ৩.৩:উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান
পাঠ ৩.৪:দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক
পাঠ ৩.৫:দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি
পাঠ ৩.৬:দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন
পাঠ ৩.৭:দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত
পাঠ ৩.৮:ত্রিঘাত সমীকরণ
পাঠ ৩.৯:বিবিধ সমস্যা ও সমাধান
পাঠ ৩.১০:ব্যবহারিক

পাঠ ৩.১ বহুপদী ও তার ঘাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদী কী বলতে পারবেন,
- বহুপদীর ঘাত কী বলতে পারবেন,
- বীজগাণিতিক রাশি ও বহুপদীর মধ্যে সম্পর্ক বর্ণনা করতে পারবেন,
- এক চলক ও দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদী কী তা বলতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বীজগাণিতিক রাশি, বহুপদী, ঘাত

মূলপাঠ

প্রাথমিক আলোচনা: গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যেসকল রাশির মান পরিবর্তনশীল তাকে **চলরাশি**(variable) এবং যেসকল রাশির মান পরিবর্তনশীল নয় তাকে **ধ্রুবক** (constant) রাশি বলে। সাধারণত চলরাশিকে $x, y, z,...$ দ্বারা এবং ধ্রুব রাশিকে $a, b, c,...$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে $+, -, \times, \div$ ঘাত বা মূল চিহ্নের যে কোন একটি বা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, তাকে বীজগাণিতিক রাশিমালা বা সংক্ষেপে রাশিমালা বলা হয়। এখানে সংখ্যা বলতে বাস্তব সংখ্যাকে বুঝানো হয়েছে।

যেমন- $5x + 3, 2x^4 + 3x^3 + 4x - 7, \sqrt[3]{x^3 + 7}, \frac{x-3}{x^2 - 2x + 5}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ ইত্যাদি। এখানে x হলো চলক।

বহুপদী: বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়। যেমন, $x - 2, 3x^2 - 4x + 5, x^2 - 3xy + 5y^2, x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই বহুপদী। এখানে x ও y হল চলক। বহুপদীতে চলক দ্বারা ভাগ করা যায় না। যেমন, $\sqrt{3x} - \frac{2}{x} + 3, \frac{x^2 - 5x + 2}{x + 2}, \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ ইত্যাদি বহুপদী নয়, কিন্তু বীজগাণিতিক রাশি।

এক চলকের বহুপদী: এক চলক বিশিষ্ট বহুপদীকে এক চলকের বহুপদী বলা হয়। চলকটি যদি x হয় তবে তাকে $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন $f(x)=a_0x+a_1$, $g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$

$h(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_1x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ রাশিগুলো একটি মাত্র চলক x-এর বহুপদী। এখানে a_0, a_1, a_2 ....a_{n-1}, a_n ইত্যাদি ধ্রুবক এবং এদেরকে বহুপদীর সহগ বলা হয়।

দুই চলকের বহুপদী:দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীকে দুই চলকের বহুপদী বলা হয়। চলকদ্বয় যদি x ও y হয় তবে বহুপদীকে $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন $f(x, y) = ax + by + c$

$g(x, y) = x^2 + y^2 + a^2$

$h(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$

ইত্যাদি দুই চলকের বহুপদী। এখানে a, b, c, d সংখ্যাগুলো ধ্রুবক এবং বহুপদীর সহগ। a ধ্রুবক হলে এবং m ও n অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, ax^my^n আকৃতির এক বা একাধিক পদের যোগফলকে দুই চলকের বহুপদী বলা হয়।

বহুপদীর ঘাত:

(i)এক চলক বিশিষ্টবহুপদীর ঘাত:বহুপদীতে চলক x-এর ঘাত n এর মান শূণ্য বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। n এর মান শূন্য হলে বহুপদীর আকার a_0x^0, তাকে সাধারণত a_0 লেখা হয় এবং ধ্রুব বহুপদী বলা হয়। পূর্ণতার খাতিরে শূন্য বহুপদীর অবতারণার প্রয়োজন হয়। শূন্য বহুপদীর সকল সহগ শূন্য। শূন্য বহুপদীর ঘাত অসংজ্ঞায়িত। বহুপদীর পদসমূহের মধ্যে বিদ্যমান x-এর সর্বোচ্চ ঘাতকে বহুপদীর ঘাত বা মাত্রা বলা হয়। $a_0 \neq 0$ হলে $f(x) = a_0$ এর ঘাত শূন্য, $g(x) = a_0x + a_1$ এর ঘাত এক এবং$h(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1} + a_n$ এর ঘাতn।

(ii) দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীর ঘাত:ax^my^n কোন বহুপদীর একটি পদ হলে $(m + n)$ হলো ঐ পদের ঘাত। অর্থাৎ x এবং y এর ঘাত এর যোগফলই হলো ঘাত।দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীর পদগুলোর মধ্যে উচ্চতম ঘাতকে বহুপদীর ঘাত বলা হয়। যেমন- $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2y + c$বহুপদীর**ঘাত**2,$g(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$বহুপদীর **ঘাত**3। একইভাবে চার বা যে কোন সংখ্যক চলক সমন্বিত বহুপদীর সংজ্ঞা দেয়া যায় এবং তাদের ঘাত নির্ণয় করা যায়।

সারসংক্ষেপ

- গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যেসকল রাশির মান পরিবর্তনশীল তাকে **চলরাশি**(variable) এবং যেসকল রাশির মান পরিবর্তনশীল নয় তাকে **ধ্রুবক** রাশি(constant)বলে।
- **বহুপদী** বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়। যেমন, $x - 2$, $3x^2 - 4x + 5$, $x^2 - 3xy + 5y^2$, $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ইত্যাদি প্রত্যেকেই **বহুপদী**। এখানে xও yহল চলক।
- এক চলক বিশিষ্ট বহুপদীকে এক চলকের বহুপদী বলা হয়, দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীকে দুই চলকের বহুপদী বলা হয়।
- বহুপদীর পদসমূহের মধ্যে বিদ্যমান চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে বহুপদীর **ঘাত বা মাত্রা** বলা হয়।

পাঠ ৩.২ বহুপদী সমীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদী সমীকরণ কী বলতে পারবেন,
- বহুপদী সমীকরণের ঘাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- বহুপদী সমীকরণের মূলের বর্ণনা দিতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বহুপদী সমীকরণ, ঘাত, মূল

মূলপাঠ

বহুপদী সমীকরণ: মনে করুন,$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ একটি এক চলকের বহুপদী, যেখানে $a_0, a_1, a_2,... ,a_n$ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$। যদি $f(x) = 0$ সমীকরণের ঘাত $n \geq 1$ হয় তবে ঐ সমীকরণকে বহুপদী সমীকরণ বলা

হয়। এখানে, $f(x) = 0$ সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n, সুতরাং বহুপদী সমীকরণটির ঘাত n। এখানে a_0 কে মুখ্য সহগ বলা হয়।

উদাহরণ:$x^2 - 5x + 6 = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ।

এখানে, x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। সুতরাং বহুপদী সমীকরণের ঘাত 2 এবং মুখ্য সহগ হল 1।

ভাগশেষ উপপাদ্য(Remainder Theorem): x এর একটি বহুপদী $f(x)$ কে $x - a$দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $= f(a)$

প্রমাণ: যেহেতু, ভাজক $x - a$এর ঘাত 1 সেহেতু ভাগশেষের ঘাত শূন্য হবে অর্থাৎ ভাগশেষ ধ্রুব রাশি হবে।

সুতরাং ধরুন$f(x)$ কে $x - a$দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $= Q(x)$ এবং ভাগশেষ $= R$হয়।

অতএব $f(x) = (x-a).\ Q(x) + R$ ... (i); যেহেতু ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

$\therefore x$এর স্থলে a বসালে পাই, $f(a) = (a - a).\ Q(x) + R = R$; সুতরাং ভাগশেষ $R = f(a)$

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem): যদি a বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর একটি মূল হয় তবে $(x - a)$, সমীকরণ$f(x) = 0$ এর একটি উৎপাদক হবে।

প্রমাণ: যেহেতুa বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$এর একটি মূল, সুতরাং $x = a$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

অতএব $f(a) = 0$ হবে।ভাগশেষ উপপাদ্য হতে পাই,$f(x) = (x - a)\ Q\ (x) + f(a)$

$\therefore f(x) = (x - a)\ Q(x)$ যেহেতু $f(a) = 0$

অতএব $f(x)$ বহুপদীটি $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং $(x - a)$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য:nঘাত বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের সর্বোচ্চnসংখ্যক মূলআছে।

প্রমাণ: ধরুন, $f(x) \equiv P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + ... + P_{n-1}x + P_n = 0, (P_0 \neq 0)$

এখন, বীজগণিতের মূল উপপাদ্য অনুসারে আমরা জানি, প্রত্যেক সমীকরণের কমপক্ষে একটি বাস্তব বা কাল্পনিক মূল রয়েছে।সুতরাং, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল a_1হলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $f(x)$ বহুপদীটি $x - a_1$দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগশেষxএর $n-1$ ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী হবে, যা ধরুন$f_1(x)$;সুতরাং$f(x) = (x - a_1)\ f_1(x)$

আবার $f_1\ (x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল a_2হলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $f_1(x)$ বহুপদটি $x - a_2$দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে এবং ভাগশেষ x এর $n - 2$ ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী হবে যা ধরুন$f_2(x)$; সুতরাং $f_1(x) = (x - a_2).\ f_2(x)$

অতএব $f(x) = (x - a_1).\ (x - a_2).\ f_2(x)$.

অনুরূপভাবে, $f_2(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল a_3হলে সেক্ষেত্রে $f(x) = (x - a_1)\ (x - a_2)\ (x - a_3)\ f_4\ (x)$এবং এভাবে a_4, a_5.....a_nহলে $f(x)$ এর $(x-a_1), (x - a_2), (x - a_3)$, ... $(x - a_n)$, n সংখ্যক উৎপাদক পাওয়া যাবে।

অর্থাৎ $f(x) = P_0\ (x - a_1)\ (x - a_2)\ (x - a_3)$ .... $(x - a_n)$ এবং$f(x)$ এ xএর স্থলে $a_1, a_2, a_3,......... , a_n$বসালে$f(x) = 0$ হবে।

সুতরাং $f(x) = 0$ সমীকরণের n সংখ্যক মূল বিদ্যমান। আবার ঐ n সংখ্যক মূল ব্যতিত $f(x) = 0$ সমীকরণটি গঠিত হয় না। তাই এরূপ সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, n ঘাতের $(n \geq 1)$ বহুপদীরাশি $f(x)$ (যার সহগ বাস্তব বা জটিল) এর অনুরূপ সমীকরণ $f(x) = 0$ কেবল মাত্র n সংখ্যক মূল রয়েছে।

উপপাদ্য: মূলদ সহগ বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের অমূলদ মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে জোড়ায় থাকে।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x) = 0$একটি বহুপদী সমীকরণ যার একটি মূল $a + \sqrt{b}$, প্রমাণ করতে হবে যে, $f(x) = 0$ এর অপর একটি মূল $a - \sqrt{b}$। সুতরাং এ মূলদ্বয়ের জন্য $f(x)$ এর দুইটি উৎপাদক হলো $(x - a - \sqrt{b})$ এবং $(x - a + \sqrt{b})$।

এখন $(x - a - \sqrt{b}) \times (x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 + b$

ধরুন,$f(x) = Q\{(x - a)^2 + b^2\} + Rx + R'$; এখানে Q = ভাগফল এবং $Rx + R'$= ভাগশেষ।

এখন অভেদটিতে $x = a + \sqrt{b}$বসালে $f(x) = 0$ এবং $(x - a)^2 + b = 0$;

অতএব $R(a + \sqrt{b}) + R' = 0$। সুতরাং $Ra + R' + R\sqrt{b} = 0$

অতএব, $Ra+R'=0$ এবং$R= 0$ ($\because$ মূলদ ও অমূলদ অংশের সমষ্টি শূন্য হলে উভয়ই পৃথক ভাবে শূন্য হয়)।

যেহেতু $R = 0 \therefore R' = 0$ সুতরাং $f(x) = 0$ বহুপদী সমীকরণটি $(x - a - \sqrt{b})$ বা, $(x - a)^2 + b$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।
অতএব $f(x) = 0$ এর একটি মূল $a + \sqrt{b}$ হলে অপর একটি মূল $a - \sqrt{b}$ হবে।
অর্থাৎ মূলদ সহগ বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের অমূলদ মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে জোড়ায় থাকে।
মন্তব্য:মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $a + \sqrt{b}$ (অমূলদ) হলে অপরমূলটি অনুবন্ধী $a - \sqrt{b}$ (অমূলদ) হবে।

উপপাদ্য: বাস্তব সহগ বিশিষ্ট কোনো বহুপদী সমীকরণের জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে জোড়ায় থাকে।
প্রমাণ: মনে করুন, $f(x) = 0$ একটি বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ এবং $x = a + ib$ এর একটি মূল,
যেখানে $a, b \in \mathbf{P}$ এবং $i = \sqrt{-1}$. সুতরাং, $f(a + ib) = 0$ ----------- (i)
আবার, যেহেতু বহুপদী $f(x)$ এর সহগগুলো বাস্তব।
অতএব $f(a + ib) = A + iB$ ..... (ii) এবং $f(a - ib) = A - iB$ ....(iii) যেখানে $A, B \in$ P এবং $i = \sqrt{-1}$
এখন (i) এবং (ii) নং হতে পাই, $0 = A + iB$ বা, $A = 0, B = 0$ $[A + iB = 0 \Leftrightarrow A = 0, B = 0]$
এখন (iii) নং এ $A = 0$ ও $B = 0$ বসালে পাই $f(a - ib) = 0$
সুতরাং প্রদত্ত $f(x)=0$ সমীকরণের একটি মূল $a + ib$ হলে সমীকরণটির অপর একটি মূল $a - ib$। আবার বিপরীতক্রমে একটি মূল $a - ib$ হলে সমীকরণটি অপর একটি মূল $a + ib$। অতএব বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের কাল্পনিক বা জটিল সংখ্যার মূলগুলো সর্বদা অনুবন্ধী যুগলে থাকে।
মন্তব্য :বাস্তব সহগ বিশিষ্ট কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল জটিল বা কাল্পনিক হলে অপর মূলটি অনুবন্ধী আকারে জটিল বা কাল্পনিক হয়।

সারসংক্ষেপ

- $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ একটি এক চলকের বহুপদী, যেখানে $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$। যদি $f(x) = 0$ সমীকরণের ঘাত $n \geq 1$ হয় তবে ঐ সমীকরণকে বহুপদী সমীকরণ বলা হয়। এখানে, $f(x) = 0$ সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n সুতরাং বহুপদী সমীকরণটির ঘাত n। এখানে a_0 কে মুখ্য সহগ বলা হয়।
- n ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের সর্বোচ্চ n সংখ্যক মূল আছে।

পাঠ ৩.৩ উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণকে উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত সমীকরণকে সূত্র ব্যবহার করে সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিঘাত সমীকরণ, উৎপাদক

মূলপাঠ

দ্বিঘাত সমীকরণ(Quadratic Equations): যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি (x) এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ কে একটি সাধারণ আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ ধরা হয়।

প্রমাণ করতে হবে যে, দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশি মূল থাকতে পারে না।

প্রমাণ: মনে করুন, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির তিনটি ভিন্ন ভিন্ন মূল α, β, γ বিদ্যমান। সুতরাং α, β, γ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। অতএব, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ -------- (i) $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ ------- (ii) $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ ------ (iii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই, $a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)\ \{a(\alpha + \beta) + b\} = 0$ $\Rightarrow a(\alpha + \beta) + b = 0$ কেননা $\alpha - \beta \neq 0$ ---------- (iv)

অনুরূপভাবে, (ii) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই, $a(\beta + \gamma) + b = 0$ কেননা $\beta - \gamma \neq 0$ ----------- (v)

(iv) থেকে (v) বিয়োগ করে পাই, $a(\alpha - \gamma) = 0$ ------------ (vi)

যেহেতু $a \neq 0$ সুতরাং (vi) থেকে পাই $\alpha - \gamma = 0$ অর্থাৎ $\alpha = \gamma$, যা আমাদের কল্পনা বিরুদ্ধ।

অতএব, বলা যায় যে দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশি মূল থাকতে পারে না।

উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান:$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ চলকের আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণের উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান পূর্ববর্তী শ্রেণি সমূহে আলোচিত হয়েছে। তবুও একটি উদাহরণের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান দেখানো হলো।

উদাহরণ 1:$x^2 - 5x + 6 = 0$ কে উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করুন।

সমাধান:$x^2 - 5x + 6 = 0$বা,$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

বা,$x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

বা, $(x - 2)(x - 3) = 0$

বা, $x - 2 = 0$ অথবা $x - 3 = 0$

$\therefore x = 2 \quad x = 3$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান :$x = 2, 3$

সূত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

$ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ।

এখন সমীকরণটির উভয় পক্ষকে $4a$দ্বারা গুণ করে পাই,

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$; বা, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$ বা, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\therefore\ 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে) অর্থাৎ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এ পদ্ধতিটি ভারতীয় বিখ্যাত গণিতবিদ **শ্রীধর আচার্য পদ্ধতি** বলে পরিচিত।

মন্তব্য :(i) a, b, cজটিল সংখ্যা হলেও মূল নির্ণয়ের সূত্রটি প্রযোজ্য।

(ii) দ্বিঘাত সমীকরণে কেবল মাত্র দুইটি মূল থাকে।

উদাহরণ 2: $2x^2 + 9x - 3 = 0$সমীকরণটিসমাধান করুন।

সমাধান:$2x^2 + 9x - 3 = 0$ সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$এর সাথে তুলনা করলে পাই, $a = 2, b = 9, c = -3$

$$\therefore x = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 24}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \dfrac{-9 + \sqrt{105}}{4}, \dfrac{-9 - \sqrt{105}}{4}$

উদাহরণ 3: $3x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করুন।

সমাধান: $3x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 3, b = 5, c = -9$

$$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.3(-9)}}{2.3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 108}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{133}}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \dfrac{-5 + \sqrt{133}}{6}, \dfrac{-5 - \sqrt{133}}{6}$

সারসংক্ষেপ

- যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি (x) এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$কে একটি সাধারণ আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ ধরা হয়।
- $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ সমীকরণটির দুইটির বেশি মূল থাকতে পারে না।

পাঠ ৩.৪ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূল সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- মূল ও সহগের মধ্যকার সম্পর্ক প্রয়োগ করতে পারবেন,
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূল, সহগ, সম্পর্ক

মূলপাঠ

মনে করুন, $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় αএবং β।

এখন, $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

বা, $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ (a দ্বারা ভাগ করে)

যেহেতু α ও β সমীকরণের মূল, সুতরাং

$(x - \alpha)$ এবং $(x - \beta)$ হলো $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ এর উৎপাদক

অতএব, $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)$

বা, $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ ------------------ (1)

উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta)$ এবং $\frac{c}{a} = \alpha\beta$

অর্থাৎ $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x\text{এর সহগ}}{x^2\text{এর সহগ}} = \sum\alpha,$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{এর সহগ}}$

অনুরূপভাবে, আমরা ত্রিঘাতিক, চতুর্থ ঘাতিক থেকে n ঘাতিক সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

মনে করুন, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ বহুপদী সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ।

$\therefore ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

α, β, γ সমীকরণের মূল হওয়ায়, $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ এবং $(x - \gamma)$ বহুপদী $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$ এর তিনটি উৎপাদক।

সুতরাং $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ ---------------- (2)

উভয় পক্ষ থেকে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta + \gamma),$

বা, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

বা, মূলগুলোর যোগফল

$= \alpha + \beta + \gamma = \sum\alpha = \frac{-b}{a}$

$= (-1)^1\frac{x^2\text{এর সহগ}}{x^3\text{এর সহগ}}$

$\frac{c}{a} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

বা, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

বা, প্রতিবার দুইটি মূল নিয়েযোগফল

$= \sum\alpha\beta = (-1)^2\frac{c}{a}$

$= (-1)^2\frac{x\text{এর সহগ}}{x^3\text{এর সহগ}}$

$\frac{d}{a} = -\alpha\beta\gamma$

বা, $\alpha\beta\gamma = (-1)^3\frac{d}{a}$

বা,মূলগুলোর গুণফল

$= (-1)^3\frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^3\text{এর সহগ}}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$ বহুপদী সমীকরণের মূলগুলো $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ হলে

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = \sum\alpha_1 = (-1)^1\frac{a_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0}$

প্রতিবার দুটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি$= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots\ldots + \alpha_n\alpha_1 = \sum\alpha_1\alpha_2 = (-1)^2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_2}{a_0}$

প্রতিবার তিনটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots\ldots + \alpha_n\alpha_1\alpha_2 = \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3\frac{a_3}{a_0} = -\frac{a_3}{a_0}$

সবগুলো মূলের গুণফল $= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$

উদাহরণ 1: $3x^2 - 7x + 11 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $3x^2 - 7x + 11 = 0$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \beta = -\frac{x\text{এর সহগ}}{x^2\text{এর সহগ}} = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta = \dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}} = \dfrac{11}{3}$

উদাহরণ 2:$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 10x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে $\sum\alpha, \sum\alpha\beta, \sum\alpha\beta\gamma$ এবং $\alpha\beta\gamma\delta$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 10x + 13 = 0$

মূলগুলোর যোগফল $= \alpha + \beta + \gamma + \delta = \sum\alpha = (-1)^1\dfrac{3}{1} = -3$

প্রতিবার দুটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি $= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \sum\alpha\beta = (-1)^2\dfrac{6}{1} = 6$

প্রতিবার তিনটি করে মূল নিয়ে মূলগুলোর সমষ্টি $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = (-1)^3\dfrac{10}{1} = -10$

মূলগুলোর গুণফল $\alpha\beta\gamma\delta = (-1)^4\dfrac{13}{1} = 13$

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান

কোনো দ্বিঘাত সমীকরণেরমূলদ্বয় α, β হলে α এবং β সমন্বিত রাশিমালায় α এর পরিবর্তে β এবং β এর পরিবর্তে α বসালে যদি রাশিমালাটির কোনো পরিবর্তন না হয় তবে রাশিমালাটিকে মূলের প্রতিসম রাশি বলা হয়। এরূপ প্রতিসম রাশির মান নির্ণয়ের জন্য ফাংশনটি মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফলের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে

(i) $\sum\alpha = \alpha + \beta$ (ii) $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ (iii) $\sum\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2$, (iv) $\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 3:$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে (i) $\sum\alpha^2\beta$, (ii) $\sum\alpha^3$ এবং (iii) $(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান:$ax^2 + bx + c = 0$, সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = \sum\alpha = -\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \dfrac{c}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{bc}{a^2}$

(ii) $\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 - 3.\dfrac{c}{a}.\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

$$= -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

(iii) $(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2) = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta + (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha^2\beta^2$

$= 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^2\beta^2$

$= 1 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} + \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2.\dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{a}.\dfrac{-b}{a} + \dfrac{c^2}{a^2}$

$$= \frac{1}{a^2}(a^2 - ab + ac + b^2 - 2ac - bc + c^2) = \frac{1}{a^2}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

সারসংক্ষেপ

- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় αএবং βহলে মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{x\text{এর সহগ}}{x^2\text{এর সহগ}} = \sum\alpha$,এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2\text{এর সহগ}}$

পাঠ ৩.৫ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমীকরণ সমাধান না করেই সমীকরণের মূলগুলো সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূলের প্রকৃতি, পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক

মূলপাঠ

পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক(Discriminant):

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a\neq 0)$ আকারের দ্বিঘাত মূলদ্বয় α ও β হলে সমাধান সূত্র হতে জানি,

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এখানে লক্ষ্যনীয় যে, $b^2 - 4ac$ রাশিটি উভয় সমাধানের বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত। উপরোক্ত সমাধানে $b^2 - 4ac$ এর মান পর্যালোচনা করলে আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি জানতে পারি। এজন্য $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির **পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক বা নিরূপক** বলা হয়। একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ পৃথায়ক $D = b^2 - 4ac$

দ্বিঘাত সমীকরণেরমূলের প্রকৃতি নির্ণয় (To determine the nature of the roots):

মূলের প্রকৃতি বলতে কোনো সমীকরণের মূলগুলো ধনাত্মক, ঋণাত্মক, মূলদ, অমূলদ, সমান, অসমান কিংবা জটিল সংখ্যা হবে কিনা তা নির্ধারণ করাকে বুঝায়। ধরুন, $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার সহগগুলো বাস্তব সংখ্যা ও মূলদ এবং এর মূলদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

এখন, যদি a, b, cএর মান বাস্তব ও মূলদ হয় তবে সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি বর্গমূল (root) চিহ্নের মধ্যের রাশি $b^2 - 4ac$দ্বারা নির্ণীত হয়। $b^2 - 4ac$সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নিরূপণে সহায়তা করে। তাই একে পৃথায়ক (Discriminant) বা নিশ্চায়ক বলা হয় এবং সংক্ষেপে Dদ্বারা সূচিত করা হয়। **অর্থাৎ পৃথায়ক, $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$**

(i) যদি $b^2 - 4ac> 0$ অর্থাৎ ধনাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।

(iiযদি$b^2 - 4ac> 0$ এবং পূর্ণবর্গ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

(iii) যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান হবে।

(iv) যদি $b^2 - 4ac< 0$ অর্থাৎঋণাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে।

মন্তব্য: (i) a, b, cঅমূলদ হলে $D> 0$ এবং পূর্ণ বর্গ হলে ও মূলদ্বয় অমূলদ হয়।

(ii) সমীকরণটির যে কোনো সহগ জটিলরাশি হলে $D> 0$ হলেও মূলদ্বয় জটিল রাশি হয়।

(iii) যদি $D = 0$ হয় তবে মূলদ্বয় সমান হবে যার প্রত্যেকটি $\frac{-b}{2a}$ এর সমান হবে।

(iv) বাস্তব ও মূলদ সহগ বিশিষ্ট কোনো সমীকরণের জটিল সংখ্যা বিশিষ্ট মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী আকারে থাকে।

(v) কোনো সমীকরণের একটি মূল অমূলদ হলে অপর একটি মূল যুগল (Conjugate) রূপে অমূলদ হয়।

(vi) কোনো সমীকরণের ধ্রুবক পদ বর্জিত হলে সমীকরণটির একটি মূল সর্বদায়ই শূন্য হয়।

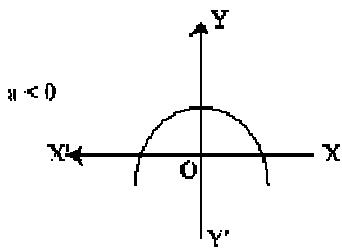
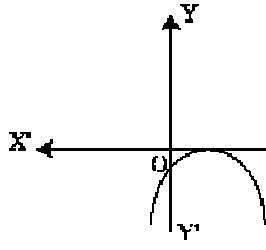
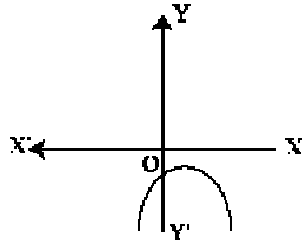
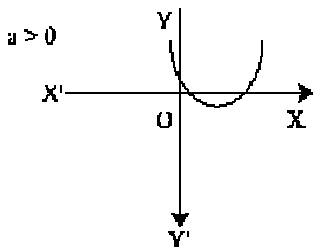
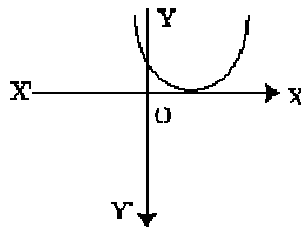
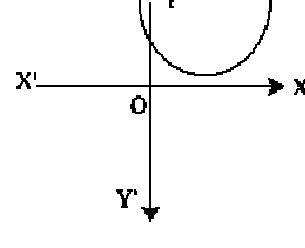
লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়:

কোনো দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

এখানে, পৃথায়ক $= b^2 - 4ac$

(i) যখন $b^2 - 4ac > 0$, তখন মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান। তখন $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখা x- অক্ষকে দুইটি বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে। ছেদবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$ এবং $\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$

(ii) যখন $b^2 - 4ac = 0$, তখন মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান। তখন $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

(iii) যখন $b^2 - 4ac < 0$, তখন মূলদ্বয় অবাস্তব ও অসমান। তখন $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।

$y = ax^2 + bx + c$ আকারের সমীকরণ সর্বদাই পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

উদাহরণ 1: $2x^2 + 5x + 9 = 0$ সমীকরণটির পৃথায়ক নির্ণয় করুন এবং মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x^2 + 5x + 9 = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক $D = (5)^2 - 4.2.9 = 25 - 72 = -47$

যেহেতু পৃথায়ক $D < 0$, সুতরাং মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে।

উদাহরণ 2: a এর মান কত হলে $x^2 - 6x - 1 + a(2x + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2 - 6x - 1 + a(2x + 1) = 0$

বা, $x^2 - 6x - 1 + 2ax + a = 0$ বা, $x^2 + (2a - 6)x + a - 1 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore$ পৃথায়ক $= (2a - 6)^2 - 4.1.(a - 1) = 0$ বা, $4a^2 - 24a + 36 - 4a + 4 = 0$

বা, $4a^2 - 28a + 40 = 0$ বা, $a^2 - 7a + 10 = 0$

বা, $a^2 - 5a - 2a + 10 = 0$বা, $a(a - 5) - 2(a - 5) = 0$
বা, $(a - 2)(a - 5) = 0$
$\therefore a = 2$ অথবা $a = 5$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন যে, $(a + b)x^2 - (a + b + c)x + \frac{c}{2} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব হবে।

সমাধান : দেওয়া আছে,$(a + b)x^2 - (a + b + c)x + \frac{c}{2} = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= \{-(a + b + c)\}^2 - 4(a + b)\frac{c}{2}$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 2ac - 2bc$
$= a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + c^2$
a, b, c এর বাস্তব মানের জন্য $(a + b)^2 + c^2$ সর্বদাই ধনাত্মক বা শূন্য।
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব।

উদাহরণ 4: নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।
(i) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 + \sqrt{17}x - 4 = 0$
সমাধান:(i) এখানে $a=1$, $b=3$ এবং $c=5$; সুতরাং পৃথায়ক, $D=b^2 - 4ac = 3^2 - 4.1.5 = -11$,যা ঋণাত্মক।
সুতরাং সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা ও অসমান হবে।
(ii) এখানে পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac = (\sqrt{17})^2 - 4.2.(-4) = 49 = 7^2$এটি একটি পূর্ণবর্গ। কিন্তু সমীকরণটিরসহগ 2, $\sqrt{17}$, 4 সবই মূলদ সংখ্যা নয় বলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব অসমান কিন্তু মূলদ না হয়ে অমূলদ হবে।
যাচাই:$x = \frac{-\sqrt{17} \pm \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 4.2(-4)}}{2.2} = \frac{-\sqrt{17} \pm \sqrt{17 + 32}}{4} = \frac{\pm 7 - \sqrt{17}}{4}$, যা অমূলদ সংখ্যা

উদাহরণ 5: $qx^2 + px + q = 0$ সমীকরণের (p, qবাস্তব) একটি মূল জটিল সংখ্যা হলে দেখান যে, $x^2 - 4qx + p^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।
সমাধান:প্রথম সমীকরণে একটি মূল জটিল সংখ্যা হওয়ায় অন্য মূলটিও জটিল সংখ্যা হবে। সুতরাং সমীকরণটির দুইটি মূলই জটিল সংখ্যা হওয়ার জন্য এর পৃথায়ক $=p^2 - 4q^2 < 0$ --------------- (i)
আবার, $x^2 - 4qx + p^2 = 0$ সমীকরণটির পৃথায়ক $= 16q^2 - 4p^2 = -4(p^2 - 4q^2)$, যা ধনাত্মক কেননা $p^2 - 4q^2 < 0$
সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

উদাহরণ 6:দেখান যে, $a = b$না হলে, $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।
সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ এর মূলগুলো বাস্তব হবে যদি পৃথায়কের মান শূন্য অথবা ধনাত্মক হয়। $\therefore$ পৃথায়ক $= \{-2(a + b)\}^2 - 4.2(a^2 + b^2) = 4(a + b)^2 - 8(a^2 + b^2)$
$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2) = 4(-a^2 - b^2 + 2ab) = -4(a - b)^2$, যা ঋণাত্মক।
যেহেতু পৃথায়কের মান ঋণাত্মক কাজেই প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে যদি পৃথায়কের মান শূন্য হয়।
অর্থাৎ $(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ হয়।
সুতরাং $a = b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।

উদাহরণ 7: $qx^2 + 2px + 2q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে প্রমাণ করুন যে,
$(p + q)x^2 + 2qx + (p - q) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল।
সমাধান: প্রথম সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবার শর্ত হলো, $(2p)^2 - 4.q.2q \geq 0$
বা,$p^2 > 2q^2$ ....(1)
আবার, দ্বিতীয় সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= 4q^2 - 4(p + q)(p - q) = 4q^2 - 4(p^2 - q^2)$
$= 8q^2 - 4p^2 = 4(2q^2 - p^2) < 0$ [(1) নং দ্বারা]

সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল।

উদাহরণ৪: $27x^2 + 6x + (p + 2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গ হলে p এর মান নির্ণয় এবং সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও α^2

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27}$ এবং $\alpha.\alpha^2 = \alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27}$ ------------- (i)

এখন, $\alpha + \alpha^2 = \frac{-2}{9}$ বা, $9\alpha + 9\alpha^2 = -2$ বা, $9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

বা, $9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$ বা, $3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$ বা, $(3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ সুতরাং; $\alpha^2 = \frac{4}{3}, \frac{1}{9}$

এখন (i) নং এ $\alpha = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $\frac{-8}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $p+2=8$ বা, $p = 6$

আবার, (i) নংএ $\alpha = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $-\frac{1}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $p + 2 = 1$ বা, $p = -1$

$\therefore p = 6, -1$

এখানে সমীকরণটি মূলদ্বয় $\frac{-2}{3}, \frac{4}{9}$ অথবা $\frac{-1}{3}, \frac{1}{9}$

মন্তব্য: $\alpha = \frac{-2}{3}$ এবং $-\frac{1}{3}$ অর্থাৎ সমীকরণটির মূলদ্বয়কে সমীকরণে বসিয়েও p এর মান নির্ণয় করা যায়।

সারসংক্ষেপ

- $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) আকারের দ্বিঘাত মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- এখানে লক্ষ্যনীয় যে, $b^2 - 4ac$ রাশিটি উভয় সমাধানের বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত। উপরোক্ত সমাধানে $b^2 - 4ac$ এর মান পর্যালোচনা করলে আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি জানতে পারি। এজন্য $b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক বা নিরূপক বলা হয়। একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ পৃথায়ক $D = b^2 - 4ac$
- যদি $b^2 - 4ac > 0$ অর্থাৎ ধনাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।
- যদি $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।
- যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও সমান হবে।
- যদি $b^2 - 4ac < 0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হয় তবে সমীকরণটির মূলদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে।

পাঠ ৩.৬ দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দেয়া থাকলে সমীকরণ গঠন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিঘাত সমীকরণ, সূত্র

মূলপাঠ

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনের সূত্র

মনেকরুন কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β;সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $x - \alpha$এবং $x - \beta$ উভয়ই নির্ণেয় সমীকরণের বামপক্ষের উৎপাদক। যেহেতু বামপক্ষ দ্বিঘাত বহুপদী সুতরাং বামপক্ষ $= (x - \alpha)(x - \beta)$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ বা, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

অর্থাৎ,x^2 – (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) x + মূলদ্বয়ের গুণফল =0

যেমন:3, 4 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ :$x^2 - (3 + 4)x + 3.4 = 0$ বা,$x^2 - 7x + 12 = 0$ ।আবার$x^2 - 6x + 9$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি যা $(x - 3)^2$ এর সমতূল্য। সুতরাং রাশিটি দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2 - 6x+9 = 0$। যার পৃথায়ক $=(-6)^2 - 4.1.9 = 0$। সুতরাং বর্গ রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান।

সমস্যা ও সমাধান: নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমস্যা ও সমাধান দেখানো হলো।

উদাহরণ1: যদি $x^2 - px + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় তবে α^2 ওβ^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি গঠন করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - px + 9 = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় αও β;

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -\frac{-p}{1} = p$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.\beta = \frac{9}{1} = 9$

এখন আমাদের α^2 ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করতে হবে।

α^2ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণের আকার হবে

x^2 – (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

বা, $x^2 - [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]x + (\alpha\beta)^2 = 0$

বা, $x^2 - (p^2 - 18)x + 9^2 = 0$ (মান বসিয়ে)

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2:কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 2 এবং তাদের তৃতীয় ঘাতের সমষ্টি 27 হলে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β

দেওয়া আছে, $\alpha+\beta = 2$ এবং $\alpha^3 + \beta^3 = 27$

এখন $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$; সুতরাং $2^3 = 27 + 3.\alpha\beta.2$ বা, $\alpha\beta = -\frac{19}{6}$

সুতরাং α, βমূলবিশিষ্ট সমীকরণ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $6x^2 - 12x - 19 = 0$ ই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 3: $x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে প্রমাণ করুন যে, উহার আর একটি মূল $\alpha^3 - 3\alpha$ হবে।

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি মূলα এবং অপর মূল β। সুতরাং $\alpha + \beta = 1$ বা, $\beta = \alpha - 1$ ------- (i)

যেহেতুপ্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β; সুতরাং α, β দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ----------- (ii) এবং $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ বা, $\beta^2 - 1 = \beta$

সমীকরণ (ii) হতে পাই, $\alpha^2 = \alpha + 1$ বা, $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$;

সুতরাং $\alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 + \alpha - 3\alpha$
বা,$\alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 - 2\alpha$
বা,$\alpha^3 - 3\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 1$
বা,$\alpha^3 - 3\alpha = (\alpha - 1)^2 - 1$ [(i) নং হতে]
বা,$\alpha^3 - 3\alpha = \beta^2 - 1 = \beta$ [$\because \beta^2 - 1 = \beta$]
সুতরাং সমীকরণটির অপর মূল $\alpha^3 - 3\alpha$.

উদাহরণ 4: $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলদ্বয় $(\alpha - \beta)^2$এবং $\alpha\beta$হবে।

সমাধান:$x^2 - qx + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta = p$এবং $\alpha\beta = q$
এখন নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি = $(\alpha - \beta)^2 + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + \alpha\beta = p^2 - 3q$
এবং মূলদ্বয়ের গুণফল = $(\alpha - \beta)^2 . \alpha\beta = \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}\ \alpha\beta = (p^2 - 4q)q$
সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) x + মূলদ্বয়ের যোগফল = 0
$\therefore x^2 - (p^2 - 3q)\ x + (p^2 - 4q)\ q = 0$ ই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 5: $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, βহলে, $pqx^2 + (p^2 + q)x + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় করুন।
সমাধান: শর্তানুসারে পাই, $\alpha + \beta = -p$------------- (i) $\alpha\beta = q$--------------- (ii)
সুতরাং $pqx^2 + (p^2 + q)\ x + p = 0$ সমীকরণকে লিখতে পারি,
$-\alpha\beta\ (\alpha + \beta)\ x^2 + [\ (\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta\ ]x - (\alpha + \beta) = 0$
অথবা, $x^2 - [\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\alpha + \beta}]x + \dfrac{1}{\alpha\beta} = 0$
অথবা, $(x - \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta})(x - \dfrac{1}{\alpha + \beta}) = 0$
সুতরাং, $x = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}, \dfrac{1}{\alpha + \beta}$ অথবা, $x = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\alpha + \beta}$ ই নির্ণেয় মূল।

উদাহরণ 6:যে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রত্যেকটি মূল $7x^2 - 8x + 1 = 0$ সমীকরণের প্রত্যেকটি মূল অপেক্ষা 2 বড়, সেই সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান:ধরুন, $7x^2 - 8x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β তাহলে $\alpha + \beta = \dfrac{8}{7}$এবং $\alpha\beta = \dfrac{1}{7}$
প্রশ্নানুসারে নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়, $\alpha + 2, \beta + 2$
সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - \{(\alpha + 2) + (\beta + 2)\}\ x + (\alpha + 2)\ (\beta + 2) = 0$
বা, $x^2 - \{\alpha + \beta + 4\}\ x + \alpha\beta + 2\ (\alpha + \beta) + 4 = 0$
বা, $x^2 - \left(\dfrac{8}{7} + 4\right) x + \dfrac{1}{7} + 2.\dfrac{8}{7} + 4 = 0$
বা, $7x^2 - 36x + 45 = 0$, ই নির্ণেয় সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি:$y = \alpha + 2\ \ \therefore y = x + 2$ [$\because \alpha$প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল] বা, $x = y - 2$;
এখনপ্রদত্ত সমীকরণে x এর স্থলে $y - 2$ বসালে, $7\ (y - 2)^2 - 8\ (y - 2) + 1 = 0$
বা,$7y^2 - 28y + 28 - 8y + 16 + 1 = 0$
বা, $7y^2 - 36y + 45 = 0$
$\therefore$ চলক পরিবর্তন করে পাই, $7x^2 - 36x + 45 = 0$ -ই নির্ণেয় সমীকরণ।

সারসংক্ষেপ

- দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল দেওয়া থাকলে সমীকরণ গঠনের সূত্র হলো:
  x^2 –(মূলদ্বয়ের সমষ্টি) x +মূলদ্বয়ের গুণফল = 0

পাঠ ৩.৭ দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূল থাকার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন,
- সাধারণ মূলের শর্ত প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূল, সাধারণ মূল, শর্ত

মূলপাঠ

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত

ধরুন, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ---------- (i) $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ----------- (ii)

সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল আছে এবং ঐ মূলটি α, সুতরাং α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

$\therefore a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ ------------ (iii) $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$ ------------ (iv)

(iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন দ্বারা পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2} \text{ ----------- (v)}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad \alpha = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \therefore \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}\right) = \left(\frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত, $(b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - b_1a_2) = (c_1a_2 - a_1c_2)^2$

সাধারণ মূলটি হবে, $\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - a_1c_2}$ অথবা, $\dfrac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$

মন্তব্য: (i) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি মূল α হলে $a_1x^2 + b_1x + c_1$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2$ রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক হবে $x - \alpha$।

দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত

ধরুন, $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ------- (i) এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ------- (ii) সমীকরণ দুইটির α, β মূল দুইটিই সাধারণ।

$\therefore$ (i) থেকে $\alpha + \beta = \dfrac{-b_1}{a_1}$ ----------- (iii) এবং $\alpha\beta = \dfrac{c_1}{a_1}$ ----------- (iv)

আবার (ii) থেকে, $\alpha + \beta = \dfrac{-b_2}{a_2}$ ----------- (v) এবং $\alpha\beta = \dfrac{c_2}{a_2}$ ------------ (vi)

$\therefore$ (iii) ও (v) থেকে $\dfrac{-b_1}{a_1} = \dfrac{-b_2}{a_2}$ বা, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ এবং (iv) ও (vi) থেকে $\dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2}$ বা, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

নির্ণেয় শর্ত: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

উদাহরণ1:যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবেদেখান যে, $p = q$অথবা, $p + q + 1 = 0$

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α; সুতরাং α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

অতএব, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ ------------ (i) এবং $\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ --------------- (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow (p-q)\,\alpha - (p-q) = 0$ বা, $(p-q)(\alpha - 1) = 0$ $\therefore p - q = 0$ বা, $\alpha - 1 = 0$

সুতরাং হয় $p = q$না হয় $\alpha = 1$; এখন $\alpha = 1$ হলে (i) হতে পাই, $p + q + 1 = 0$

অতএব, $p = q$ অথবা, $p + q + 1 = 0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে।

উদাহরণ2:$x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$x^2 + kx - 6k = 0$ -------------- (1)

এবং $x^2 - 2x - k = 0$ --------------- (2)

(1) এবং (2) সমীকরণের সাধারণ মূল α হলে,

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$ ------------------ (3)

এবং $\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$ ------------------- (4)

(3) নং এবং (4) সমীকরণ হতে বজ্রগুণন করে পাই

$$\frac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \frac{\alpha}{-6k + k} = \frac{1}{-2 - k}$$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \dfrac{1}{-2 - k}$ এবং $\dfrac{\alpha}{-6k + k} = \dfrac{1}{-2 - k}$

বা, $\alpha^2 = \dfrac{-(k^2 + 12k)}{-(2 + k)}$ বা, $\alpha = \dfrac{-5k}{-(2 + k)}$

$\therefore \alpha^2 = \dfrac{k\,(k + 12)}{2 + k}$ -------------- (5) $\therefore \alpha = \dfrac{5k}{2 + k}$ --------------- (6)

(5) এবং (6) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\left(\dfrac{5k}{2 + k}\right)^2 = \dfrac{k\,(k + 12)}{2 + k}$ বা, $\dfrac{25k^2}{2 + k} = \dfrac{k\,(k + 12)}{1}$

বা, $25k^2 = k\,(k + 12)\,(k + 2)$বা, $25k^2 - k\,(k^2 + 2k + 12k + 24) = 0$

বা, $25k^2 - k^3 - 14k^2 - 24k = 0$বা, $k^3 - 11k^2 + 24k = 0$

বা, $k\,(k^2 - 11k - 24) = 0$

বা, $k\,(k - 3)\,(k - 8) = 0$

$\therefore k = 0, 3, 8$

সারসংক্ষেপ

- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত হলো: $(b_1c_2 - b_2c_1)\,(a_1b_2 - b_1a_2) = (c_1a_2 - a_1c_2)^2$
- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি হবে, $\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - a_1c_2}$ অথবা, $\dfrac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$
- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের দুইটি মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত হলো: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

পাঠ ৩.৮ ত্রিঘাত সমীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- প্রতিসম রাশির মান প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিঘাত সমীকরণ, প্রতিসম রাশি

মূলপাঠ

ত্রিঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক: এই ইউনিটের পাঠ ৪-এ দ্বিঘাত, ত্রিঘাত এবং n ঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করা হয়েছে।

ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান:
মনে করুন α, β, γ কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের মূল, তাহলে α, β, γ সম্বলিত কোনো রাশিমালার যথাক্রমে
(i) γ-কে স্থির রেখে α-এর পরিবর্তে β এবং β-এর পরিবর্তে α
(ii) β-কে স্থির রেখে γ-এর পরিবর্তে αএবং α-এর পরিবর্তে γ
(iii) α-কে স্থির রেখে β-এর পরিবর্তে γ এবং γ-এর পরিবর্তে βবসালে যদি প্রতি বারেই রাশিমালাটির মান একই থাকে তবে রাশিমালাটিকে মূলের প্রতিসম রাশি বলা হয়। অর্থাৎ $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ এই মান গুলোর কোন পরিবর্তন হয় না।

α, β, γ কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের মূল হলে
(i) $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma$ (ii) $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(iii) $\sum\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (iv) $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\alpha$
(v) $\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \sum\alpha\sum\alpha^2 - \sum\alpha^2\beta$(vi)$\sum\alpha^2\beta\gamma = \alpha\beta\gamma\sum\alpha$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 1: $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোa, b, cহলে $\sum a^2b$এর মান নির্ণয় করুন।
সমাধান: এখানে$3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোa, b, c

$$\therefore a + b + c = \sum a = \frac{2}{3}, \quad ab + bc + ca = \sum ab = 0 \text{ এবং } abc = -\frac{1}{3}$$

$$\sum a^2b = a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c$$
$$= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(a + b + c) - 3abc$$
$$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc = \frac{2}{3}.0 - 3.\left(\frac{-1}{3}\right) = 1$$

মন্তব্য:$\sum a^2b^2$, $\sum a^4$প্রত্যেকটি প্রতীক দ্বারা তিনটি পদের সমষ্টি বুঝালেও $\sum a^2b$দ্বারা ছয়টি পদের সমষ্টি বুঝায়।কেননা $a^2b + b^2c + c^2a$প্রতিসম রাশি নয়, এটি প্রতিসম রাশি হতে হলে এর সঙ্গে $b^2a + c^2b + a^2c$যোগ করতে হয়।

উদাহরণ 2: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলোa, b, c হলে নিচের প্রতিসম ফাংশনগুলোর মান নির্ণয় করুন।

(i) $\sum\frac{1}{a}$ (ii) $\sum a^2$ (iii) $\sum a^2b$ (iv) $\sum a^3$ (v) $\sum a^2b^2$ (vi) $\sum a^4$

সমাধান: $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো $a, b, c \therefore \sum a=-p.\ \sum ab=q$, এবং $abc=-r$.

(i) $\sum\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sum ab}{abc}=\frac{q}{-r}=-\frac{q}{r}$

(ii) $\Sigma a^2=a^2+b^2+c^2=(\Sigma a)^2-2\,\Sigma ab=p^2-2q$

(iii) $\Sigma a^2b\ =a^2b+b^2c+c^2a+b^2a+c^2b+a^2c$
$=ab(a+b+c)+bc\,(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc$
$=(a+b+c)\,(ab+bc+ca)-3abc$
$=\Sigma a.\,\Sigma ab-3abc=(-p)\,q-3\,(-r)=3r-pq$

(iv) $\Sigma a^3=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc=\Sigma a(\Sigma a^2-\Sigma ab)+3abc$
$=-p\,\{(p^2-2q)-q\}-3r$ [$\because$ (ii)এ দেখানো হয়েছে, $\Sigma a^2=p^2-2q$]
$=-p^3+3pq-3r$

(v) $\Sigma a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc\,(a+b+c)=q^2-2\,(-r)\,(-p)=q^2-2rp$

(vi) $\Sigma a^4=a^4+b^4+c^4$
$=\Sigma(a^2)^2=(a^2+b^2+c^2)^2-2\,(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$=\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}^2-2\{(ab+bc+ca)^2-2abc\,(a+b+c)\}$
$=\{(-p)^2-2q\}^2-2\{q^2-2(-r)\,(-p)\}=p^4+4q^2-4p^2q-2q^2+4rp$
$=p^4+2q^2-4p^2q+4pr$

উদাহরণ 3: $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x^3-px^2+qx-r=0$ --------------- (1)

যেহেতু (1) নং সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ

$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল $\sum\alpha=-\frac{-p}{1}=p$

প্রতিবার দুটি করে নিয়ে মূলগুলোর যোগফল $\sum\alpha\beta=\frac{q}{1}=q$

মূলগুলোর গুণফল $\alpha\beta\gamma=\frac{-(-r)}{1}=r$

আমাদের $\sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore\ \sum\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{p^2-2q}{r^2}$$

পাঠ ৩.৯ বিবিধ সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

উদাহরণ 1: যদি $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত pঃ q হয় তবে দেখান যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$

সমাধান: যেহেতু $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত pঃ q; সুতরাং ধরুন মূলদ্বয় $p\alpha$ এবং $q\alpha$।

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $p\alpha + q\alpha = \frac{-b}{a}$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $p\alpha . q\alpha = \frac{b}{a}$

$$\therefore (p+q)\ \alpha = \frac{-b}{a} \text{ এবং } pq\alpha^2 = \frac{b}{a}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{p+q}{\sqrt{pq}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{(p+q)\alpha}{\sqrt{pq\alpha^2}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= -\frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ 2: x বাস্তব হলে $3 + 2x - x^2$ রাশিমালাটির সর্বোচ্চ বা চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $3 + 2x - x^2 = 4 - 1 + 2x - x^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1)$

$= 4 - (x - 1)^2$-------------- (i)

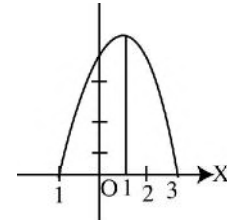
অতএব (i) নং সমীকরণ হতে সুস্পষ্ট যে, $3+2x-x^2 \leq 4$ [কেননা $(x - 1)^2 \geq 0$]

সুতরাং নির্ণেয় চরম মান $= 4$

বিকল্প: $y = -x^2 + 2x + 3 \ \therefore \frac{dy}{dx} = -2x + 2$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0,$

সুতরাং ফাংশনটি গরিষ্টমান বিদ্যমান।

এখানে চরমমানের জন্য $-2x + 2 = 0$ সুতরাং $x = 1$

বিন্দুতে রাশিমালাটির গরিষ্টমান আছে এবং গরিষ্ট মান $= -1^2 + 2.1 + 3 = 4$

উদাহরণ 3: $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 6x + 2$ কে ভাজক $x + 5$ দ্বারা সংশ্লেষণ প্রক্রিয়ায় ভাগ করুন।

সমাধান: সংশ্লেষণ প্রক্রিয়ায় ভাগ করার জন্য প্রদত্ত বহুপদীটির সহগ ও ধ্রুবক পদকে নিচের আকারে সাজাই

	1	–4	0	3	–6	2
–5		–5	45	–225	1110	–5520
	1	–9	45	–222	1104	–5518

সুতরাং ভাগফল $= x^4 - 9x^3 + 45x^2 - 222x + 1104$ এবং ভাগশেষ $= -5518$

পদ্ধতি: প্রদত্ত বহুপদী সমীকরণের বামপক্ষের সহগ ও ধ্রুবক পদগুলো ধারাবাহিকভাবে (অনুপস্থিত পদের স্থলে শূন্য ধরে) বসাতে হয়। অতঃপর $ax + b$ আকারে ভাজক হলে ছক অনুসারে ছকের বাইরে $-\frac{b}{a}$ বসাতে হয়। অতঃপর $\frac{-b}{a}$ এর সাথে সর্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগের সাথে গুণ করে পরবর্তী পদের সহগের নিচে বসিয়ে যোগ করতে হয়। এর পর

যোগফলের সাথে আবার $-\frac{b}{a}$ গুণকরে পরবর্তী সহগের নিচে বসিয়ে যোগ করতে হয়। এভাবে ধারাবাহিকভাবে প্রক্রিয়া চালিয়ে ধ্রুবক পদের নিচ পর্যন্ত যেতে হয় এবং এর শেষ যোগফলই হবে ভাগশেষ।

মন্তব্য: বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন (1642 – 1727) সর্বপ্রথম এ পদ্ধতির উদ্ভাবন করেন।

উদাহরণ 4: $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো সমান্তর প্রগমণভুক্ত হলে সমাধান করুন।

সমাধান: যেহেতু প্রদত্ত সমীকরণটির মূলগুলো সমান্তর ধারাভুক্ত সুতরাং ধরুন মূলগুলো $a - k, a, a + k$

$\therefore a - k + k + a + k = -\frac{-24}{4} = 6$ বা, $a = 2$

আবার, $(a - k).k.(a + k) = \frac{-18}{4}$ বা, $k = \pm\frac{5}{2}$

$k = \frac{5}{2}$ ধরলে, $a - k = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ এবং $a + k = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

এবং $k = -\frac{5}{2}$ ধরলে, $a - k = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ এবং $a + k = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

সুতরাং মূলগুলো, $-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}$

মন্তব্য : চতুর্ঘাতিক সমীকণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমণভূক্ত হলে মূলগুলোকে $a - 3k, a - k, a + k, a + 3k$ ধরলে সমীকরণরটি সহজে সমাধান করা যায়।

উদাহরণ 5: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ এর মূলগুলো a, b, c হলে $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: যেহেতু প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো a, b, c

সুতরাং $a + b + c = -p$, $ab + bc + ca = q$ এবং $abc = -r$

এখন ধরুন $y = \frac{a}{b+c} = \frac{a}{a+b+c-a} = \frac{a}{-p-a}$ বা, $a + py + ay = 0$ বা, $a = \frac{-py}{1+y}$ অর্থাৎ $x = -\frac{py}{1+y}$

এখন x এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসালে, $(r - pq)y^3 + (3r + p^3 - 2pq)y^2 + (3r - pq)y + r = 0$

চলক পরিবর্তন করলে নির্ণেয় সমীকরণ, $(r - pq)\, x^3 + (3r + p^3 - 2pq)\, x^2 + (3r - pq)\, x + r = 0$

উদহারণ 6: $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করুন, যখন দুইটি মূলের অনুপাত 3 ঃ 4।

সমাধান: এখানে $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$

মনে করুন সমীকরণটির, মূলত্রয়, $3k$, $4k$ এবং α

$\therefore 3k + 4k + \alpha = \frac{1}{2}$ বা, $7k + \alpha = \frac{1}{2} \therefore \alpha = \frac{1}{2} - 7k$ ---------------- (i)

আবার, $12k^2 + 3k\alpha + 4k\alpha = \frac{-22}{2} = -11 \;\therefore\; 12k^2 + 7k\alpha = -11$ --------------- (ii)

এখন (i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $12k^2 + 7k\left(\frac{1}{2} - 7k\right) = -11$ বা, $24k^2 + 7k - 98k^2 = -22$

বা, $74k^2 - 7k - 22 = 0$ বা, $(2k + 1)(37k - 22) = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}, \frac{22}{37}$

যখন $k = -\frac{1}{2}$ তখন $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4$,

আবার, যখন $k = \frac{22}{37}$ তখন $\alpha = \frac{1}{2} - 7\,\frac{22}{37} = \frac{1}{2} - \frac{154}{37} = -\frac{271}{74}$,

$\therefore$ মূলগুলো, $-\frac{3}{2}, -2, 4$ অথবা, $\frac{66}{37}, \frac{88}{37}, -\frac{271}{74}$

এখানে মূলত্রয়ের গুণফল = 12, কিন্তু $-\frac{3}{2} \times (-2) \times 4 = 12$ এবং $\frac{66}{37} \times \frac{88}{37} \times \left(-\frac{271}{74}\right) \neq 12$

সুতরাং নির্ণেয় মূলত্রয় $-\frac{3}{2}, -2, 4$

উদাহরণ 7: $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে মূলগুলো নির্ণয় করুন।

সমাধান: যেহেতু $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ এর মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত, সুতরাং ধরুন মূলগুলো $\frac{a}{k}, a, ak$

$\therefore \frac{a}{k} + a + ak = \frac{26}{3}$--------------- (i)

$\frac{a}{k}.a + \frac{a}{k}.ak + a.ak = \frac{52}{3}$--------------- (ii)

এবং $\frac{a}{k}.a.ak = \frac{24}{3}$ বা, $a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$

এখন (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $a(\frac{1}{k} + 1 + k) = \frac{26}{3}$ বা, $2(\frac{1}{k} + 1 + k) = \frac{26}{3}$

সমাধান করে পাই, $k = 3$ বা, $k = \frac{1}{3}$;

সুতরাং নির্ণেয় মূলগুলো হলোঃ $\frac{2}{3}, 2, 6$

মন্তব্য: চতুর্ঘাতিক সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর ধারায় থাকলে $\frac{a}{k^3}, \frac{a}{k}, ak, ak^3$ ধরলে সমাধান সহজে করা যায়।

উদাহরণ8: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং c অশূন্য হলে প্রমাণ করুন যে,

$$(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ -------------- (1)

যেহেতু (1) নং এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং গুণফল $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

বা, $a\alpha + a\beta = -b$

বা, $a\alpha + b = -a\beta$

বা, $(a\alpha + b)^{-2} = (-a\beta)^{-2}$

বা, $(a\alpha + b)^{-2} = \frac{1}{a^2\beta^2}$ --------------- (2)

আবার, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

বা, $a\alpha + a\beta = -b$

বা, $a\beta + b = -a\alpha$

বা, $(a\beta + b)^{-2} = (-a\alpha)^{-2} = \frac{1}{a^2\alpha^2}$ ----------- (3)

(2) নং এবং (3) যোগ করে পাই,

$$\therefore (a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{1}{a^2\beta^2} + \frac{1}{a^2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{a^2.(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{a^2.\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ9: a, b বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে, $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব সংখ্যা হবে। সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে প্রমাণ করুন যে, $a = 2b$ অথবা $4a = 11b$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a - 2b = 0$ -------------------- (1)

(1) নং সমীকরণের পৃথায়ক $= \{2(a + b)\}^2 - 4.2b.(3a - 2b)\}$

$= 4(a + b)^2 - 8b(3a - 2b) = 4(a^2 + 2ab + b^2) - 24ab + 16b^2$

$= 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 24ab + 16b^2 = 4a^2 - 16ab + 20b^2$
$= 4\,(a^2 - 4ab + 5b^2) = 4\,\{a^2 - 2.a.2b + (2b)^2 + b^2\} = 4\,\{(a-2b)^2 + b^2\}$

ইহা সর্বদাই যোগবোধক। অর্থাৎ পৃথায়ক > 0, সুতরাং (1) নং সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে।

শর্তানুসারে, (1) নং এর একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ।

মনে করুন, মূলদ্বয় α এবং 2α

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha + 2\alpha = -\dfrac{2\,(a+b)}{2b} = -\dfrac{a+b}{b}$

বা, $3\alpha = -\dfrac{a+b}{b}\ \therefore \alpha = -\dfrac{a+b}{3b}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.2\alpha = \dfrac{3a-2b}{2b}$

$\therefore 2\alpha^2 = \dfrac{3a-2b}{2b}$

বা, $2\left\{-\left(\dfrac{a+b}{3b}\right)\right\}^2 = \dfrac{3a-2b}{2b}$ [α এর মান বসিয়ে]

বা, $2\,\dfrac{a^2+2ab+b^2}{9b^2} = \dfrac{3a-2b}{2b}$

বা, $4\,(a^2 + 2ab + b^2) = 9b\,(3a - 2b)$

বা, $4a^2 + 8ab + 4b^2 = 27ab - 18b^2$

বা, $4a^2 - 19ab + 22b^2 = 0$

বা, $(a-2b)\,(4a-11b) = 0$

$\therefore$ $a - 2b = 0$ অথবা $4a - 11b = 0$

$a = 2b$ অথবা $4a = 11b$

উদাহরণ 10: $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মুলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $4x^2-6x+1=0$ ------------------ (1)

যেহেতু (1) নং সমীকরণের মূলদ্বয় αও β

$\therefore \alpha + \beta = -\dfrac{-6}{4} = \dfrac{3}{2}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

আমাদের $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ-

x^2 –(মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - \left(\alpha + \dfrac{1}{\beta} + \beta + \dfrac{1}{\alpha}\right)x + \left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$

বা, $x^2 - \left\{(\alpha+\beta) + \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)\right\}x + \alpha\beta + 1 + 1 + \dfrac{1}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \left\{\dfrac{3}{2} + \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right\}x + \dfrac{1}{4} + 2 + \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 0$ বা, $x^2 - \left\{\dfrac{3}{2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\right\}x + \dfrac{1}{4} + 2 + 4 = 0$

বা, $x^2 - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} \times 4\right)x + \dfrac{1}{4} + 6 = 0$ বা, $x^2 - \left(\dfrac{3+12}{2}\right)x + \left(\dfrac{1+24}{4}\right) = 0$

বা, $4x^2 - 30x + 25 = 0$

উদাহরণ 11:এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমানের সমান হবে।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ --------------- (1)

মনে করুন(1) এর মূলদ্বয় α ও β।

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta = -\left(\frac{-2a}{1}\right) = 2a$এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.\beta = \frac{a^2-b^2}{1} = a^2 - b^2$

এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় হবে $|\alpha+\beta|$ এবং $|\alpha-\beta|$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2-\{|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|\}x+|\alpha+\beta|\,|\alpha-\beta|=0$$

বা, $x^2-\left\{|\alpha+\beta|+\left|\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right|\right\}x+|2a|\left|\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right|=0$

বা, $x^2-\left\{|2a|+\left|\sqrt{(2a)^2-4(a^2-b^2)}\right|\right\}x+|2a|\left|\sqrt{(2a)^2-4(a^2-b^2)}\right|=0$

বা, $x^2-\left\{2a+\left|\sqrt{4a^2-4a^2+4b^2}\right|\right\}x+2a\left|\sqrt{4a^2-4a^2+4b^2}\right|=0$

বা, $x^2-\left\{2a+\left|\sqrt{4b^2}\right|\right\}x+2a\left|\sqrt{4b^2}\right|=0$

বা, $x^2-\{2a+|2b|\}x+2a|2b|=0$

বা, $x^2-\{2a+2b\}x+2a.\,2b=0$

বা, $x^2-2(a+b)x+4ab=0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৯

1. (a) নিচের সম্পর্কগুলো অভেদ কিনা পরীক্ষা করুন:

   (i) $(x-3)^2-(x+3)^2+12x=0$

   (ii) $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\,c+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}\,b+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\,a=x$

   (b) মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করুন এবং x এর মান নির্ণয় করে তা যাচাই করুন ।

   (i) $2x^2+6x+5=0$ (ii) $x^2+ax+a^2=0;\ a\neq 0$

   (iii) $(2+\sqrt{5})\,x^2+\sqrt{12}\,x+(2-\sqrt{5})=0$ (iv) $x^2+2\,(a+b)x+2(a^2+b^2)=0$

2. k কত হলে নিম্নের সমীকরণগুলোর মূল (ক)বাস্তব ও অসমান,(খ) বাস্তব ও সমান,(গ) জটিল হবে?

   (i) $kx^2+3x+4=0$ (ii) $(3k+1)\,x^2+(11+k)\,x+9=0$ (iii) $(k-1)^2-(k+2)\,x+4=0$

3. প্রমাণ করুন যে, নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের অন্তর্ভুক্ত ধ্রুবকসমূহ বাস্তব হলে মূলগুলো সর্বদা বাস্তব হবে।

   (i) $2(a+b)\,x^2+2\,(a+b+c)\,x+c=0$ (ii) $2bx^2+2\,(a+b)\,x+3a=2b$

   (iii) $(3a-b)\,x^2+(b-a)\,x-2a=0$ (iv) $x^2-2\,(p-2)\,x+2p-10=0$

4. (i) a, b, c, kপ্রত্যেকে মূলদ এবং $bk=k^2a+c$হলে দেখান যে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ।

   (ii) $a=b+c$হলে দেখান যে, $(b-c+a)\,x^2-(a+b+c)\,x+(a-b+c)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ।

   (iii) a, b, cমূলদ এবং $a+b+c=0$ হলে দেখান যে,$(b+c-a)\,x^2+(c+a-b)\,x+(a+b-c)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে।

   (iv) প্রমাণ করুন যে, $(a^2-b^2)\,x^2+2\,(a^2+b^2)\,x+a^2-b^2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে।

   (v) $(b-c)\,x^2+(c-a)\,x+a=b$এর মূলদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ করুনa, b, cসমান্তর ধারায় আছে।

5. (i) $b=p$না হলে দেখান যে $x^2-2bx+(2b^2-2pb+p^2)=0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হতে পারে না।

(ii) যদি $k > 0$ এবং 3 এর চেয়ে বৃহত্তর না হয় তাহলে দেখান যে $(k-2)x^2 - 8(8-2k)x - (8-3k) = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হবে।

6. (i) প্রমাণ করুন যে, $px^2 - 2qx - p = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে $qx^2 - 2px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে।

(ii) প্রমাণ করুন যে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের দুইটি ভিন্ন বাস্তব মূল থাকলে, kএর যে কোনো বাস্তব মানের $x^2 + px + q + k(2x + p) = 0$ সমীকরণের দুইটি ভিন্ন বাস্তব মূল থাকবে।

(iii) $qx^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় কাল্পনিক হলে দেখান যে, $x^2 - 4qx + p^2 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

(iv) $a^2x^2 + 6abx + ac + 8b^2 = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে দেখান যে, $ac(x+1)^2 = 4b^2x$ এর মূলদ্বয় সমান।

(v) $x^2 + 2rx + pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে প্রমাণ করুন যে,
$x^2 - 2(p+q)x + (p^2 + q^2 + 2r^2) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো কাল্পনিক হবে।

7. (i) $(k+2)x^2 + (3k-2)x + (2k-3) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক হলে, kএর মানের সীমা নির্ণয়করুন।

(ii) $x^2 - px + q = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হলে দেখান যে, pএর মান $2q$এবং $-q$এর মধ্যে থাকতে পারে না।

(iii) $2ax(x + nc) + (n^2 - 2)c^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হলে nএর মানের সীমা নির্ণয় করুন ।

8. (i) a, b, cবাস্তব রাশি হলে দেখান যে, $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সর্বদাই বাস্তব। আরও দেখান $a = b = c$ না হলে এর মূলগুলো কখনই সমান হতে পারে না।

(ii) প্রমাণ করুন যে, $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)x + (c^2 + d^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে এরা পরস্পর সমান হবে এবং সেক্ষেত্রে এর মূল দুইটির মান নির্ণয় করুন ।

(iii) দেখান যে, $(a^4 + b^4)x^2 + 4abcdx + (c^4 + d^4) = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হলে এরা সমান।

(iv) a, b, cগুণোত্তর ধারায় থাকলে দেখান যে, $(a^2 + b^2)x - 2b(a+c)x + (b^2 + c^2) = 0$ এর মূলদ্বয় সমান।

(v) প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হবে এবং $a=b=c$না হলে এরা সমান হতে পারে না।

9. (i) $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে দেখান যে $a = b = c$ যখন $a, b, c \in P$

(ii) kএর মান কত হলে $4x^2 + 4x + 1 - k(x^2 - 2x - 8)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে।

(iii) প্রমাণ করুন যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + (k^2 - b^2)$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে, যখন $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$

10. (i) mএর মান কত হলে $x^2 - 2(5 + 2m)x + 3(7 + 10m) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে।

(ii) $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + (c^2 + d^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে দেখান যে, $a:b = c:d$

(iii) $(a^2 - bc)x^2 + 2(b^2 - ca)x + c^2 - ab = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে প্রমাণকরুন যে,
(ক) $b = 0$ অথবা, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (খ) $a + b + c = 0$ অথবা, $a = b = c$

11. (i) যদি $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $3 : 4$ হয় তবে দেখান যে, $12b^2 = 49ac$.

(ii) $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ধারাবাহিক পূর্ণ সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$

(iii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণে একটি মূল অপরটির বর্গ হলে প্রমাণ করুন যে, $p^3 - q(3p - 1) + q^2 = 0$

(iv) $2x^2 - 33x + b = 0$ এর একটি মূল অপরটির দশগুণ হলে bএর মান এবং সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় করুন ।

(v) $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4 এবং $x^2 + ax + b = 0$ মূলদ্বয় সমান হলে b এর মান নির্ণয় করুন ।

(vi) kএর মান কত হলে $(k^2 - 3)x^2 + 2kx + (3k - 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে।

(vii) kএর মান কত হলে, $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিন গুণ হবে।

(viii) a, b, cবাস্তব হলে দেখান যে $(a - b - c)x^2 + ax + b + c = 0$ সমীকরণটির মূলটি বাস্তব হবে। আরো দেখান যে, মূলদ্বয়ের একটি অপরটির দ্বিগুণ হলে $b + c = \frac{a}{3}$ বা, $\frac{2a}{3}$

(ix) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টার বর্গ হলে, প্রমাণ করুন যে, $a^3 + c^3 + abc = 0$

(x) $27x^2 + 6x - (p + 2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, pএর মান নির্ণয় করুন ।

(xi) $x^2 - p(x + 1) - c = 0$ এর মূলদ্বয় a, bহলে দেখান যে, $(a + 1)(b + 1) = 1 - c$

অতঃপর প্রমাণ করুন $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + 2a + c} + \frac{b^2 + 2b + 1}{b^2 + 2b + c} = 1$

(xii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত r হয়, তবে দেখান যে, $ac\,(1 + r)^2 = b^2r$

(xiii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে,

(a) $b^3 = ac(3b - a - c)$, অথবা, $a^2c + ac^2 + b^3 = 3\,abc$ (b) $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$

(xiv) $x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে প্রমাণ করুন যে, এর আর একটি মূল $\alpha^3 - 3\alpha$ হবে।

12. (i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ করুন যে,

(a) $\alpha^{-2} + \beta^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

(b) $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 21ac}{a^2c^2}$ (c) $(a\alpha + b)^{-3} = \frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3c^3}$

(ii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha^3\beta^{-1} + \alpha^{-1}\beta^3$ এর মান নির্ণয় করুন ।

(iii) $x^2 - 7x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{2-\alpha}{3+\beta} + \frac{2-\beta}{3+\alpha}$ এর মান নির্ণয় করুন ।

(iv) $px^2 + qx - p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ করুন যে, $(p\alpha + q)(p\beta + q) = p^2$

(v) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha + p)^{-4} + (\beta + p)^{-4}$ এর মান p ও q মাধ্যমে প্রকাশ করুন ।

(vi) $x^2 - 5x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ করুন যে, $\alpha^3 - \beta^3 - 5(\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta) = 0$

(vii) $6x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণকরুন যে,

$\frac{1}{2}(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3) + \frac{1}{2}(a + bb + c\,b^3) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4}$

(viii) $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + 10px + q = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha + 4, \beta + 4$ হলে দেখান যে, $p = 2$ এবং $q = -48$

(ix) $2x^2 - 3x + 6 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + x + k + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha - 1, \beta - 1$ হলে দেখান যে, $k = 3$

(x) $ax^2 - 3x + 6 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে দেখান যে, $\frac{a\alpha^2}{b\alpha + c} - \frac{a\beta^2}{b\beta + c} = 0$

(xi) $x^2 - 2(p - 2)x + 2p - 10 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অন্তর 6 হলে দেখান যে, p এর সম্ভাব্য মান 1 অথবা 5

(xii) $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অন্তর 1 হলে প্রমাণ করুন যে, $b^2 + 4c^2 = (1 + 2c)^2$

(xiii) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $m{:}n$ হলে প্রমাণ কর যে, $mnb^2 = ac(m + n)^2$

13. (i) $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $Ax^2 + 2Bx^2 + C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \delta, \beta + \delta$ হলে প্রমাণ করুন যে, $A^2(b^2 - ac) = a^2(B^2 - AC)$

(ii) $ax^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অন্তর এবং $bx^2 - cx + a = 0$ এর মূলদ্বয়ের অন্তর সমান হলে প্রমাণ করুন যে, $b^4 - a^2c^2 = 4ab(bc - a^2)$

(iii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ করুন যে, $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$ এর একটি মূল $\frac{\alpha}{\beta}$

(iv) $x^2 - px + q = 0$ এবং $x^2 - qx + p = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর মধ্যে পার্থক্য ধ্রুবক হলে প্রমাণ করুন যে $p = q$ অথবা, $p + q + 4 = 0$

(v) $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে দেখান যে, $(p\alpha + q)^{-2} + (p\beta + q)^{-2} = (p^4 - 4p^2q + 2q^2).\,q^{-4}$

(vi) প্রমাণ করুন যে, $2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 3a^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি a, b বর্জিত।

(vii) $x^2 - 2px + q = 0$ এর মূলদ্বয় পরস্পর সমান হলে দেখান যে, $(1 + y)\,x^2 - 2\,(p + y) + (q + y) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও ভিন্ন ভিন্ন হবে, যখন $p \neq 1$ এবং $y < 0$।

(viii) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় p, q হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ এর মূলদ্বয়কে p, q এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন ।

14. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে নিম্নের মূলগুলো দ্বারা গঠিত সমীকরণসমূহ নির্ণয় করুন ।

(i) $\alpha - 1, \beta - 1$ (ii) $\alpha + \alpha^{-1}, \beta + \beta^{-1}$ (iii) $(\alpha + 4\beta)^{-1}$ $(\beta - 4\alpha)^{-1}$

(iv) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{ab}$ (v) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$ (vi) $\alpha + \frac{a^2}{b}$, $\beta + \frac{b^2}{a}$

15. $x^2 + 3x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha+\beta)^2$এবং $(\alpha-\beta)^2$মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।
16. মূলদ সহগ বিশিষ্ট এমন দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি মূল

    (i) $3+\sqrt{5}$(ii) $3-\sqrt{2}\, i$ (iii) $\frac{1}{3+\sqrt{(-2)}}$ (iv) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{-5})$(v) $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$
17. (i) যে সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে $x^2 - 2ax = b^2 - a^2$সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরফলের ধনাত্মক মান, সে সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।

    (ii) $a^2 + b^2 = 24, ab = 4$ হলে a, bমূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন ।

    (iii) যদি $3p^2= 5p + 2$ এবং $3q^2 = 5q + 2$ হয় তবে দেখান যে$3p - 2q, 3q - 2p$মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে $3x^2 - 5x - 100 = 0;\ p \neq 0$

    (iv) a, bএবং c, dযথাক্রমে $x^2 + px - r = 0$ এবং $x^2 + px + r = 0$ সমীকরণদ্বয়ের মূল হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $(a-c)(a-d) = (b-c)(b-d)$

    (v) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, βহলে দেখান যে, $\alpha^2 + \alpha, \beta^2 + \beta$মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি$a^2x^2 + (ab - b^2 + 2ca)x + c^2 + ca - bc = 0$ হবে এবং যদি সমীকরণ দুইটির নিশ্চায়ক যথাক্রমে D_1এবং D_2হয়, তবে দেখান যে, $D_1 \div D_2 = (a-b)^2$
18. (i) যদি $x^2+ px + q = 0$ এবং $x^2+ qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে প্রমাণ করুন যে, এদের অপর মূলগুলো$x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে।

    (ii) যে শর্তে $ax^2- bx + c = 0$ এবং $bx^2-cx + a = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকে তা নির্ণয় করুন।

    (iii) $x^2- ax + b = 0$ এবং $x^2- bx + a = 0$ সমীকরণের কেবল মাত্র একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ করুন যে,$a + b = -1$ ।আরও দেখান যে, উহাদের অপর মূলগুলো দ্বারা $x^2- x + ab = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

    (iv) $ax^2- bx + c = 0$ এবং $bx^2- cx + a = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখান যে, $c + a = \pm b$

    (v) $ax^2+ bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল $cx^2+ bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ করুন যে, $2a = c$অথবা $(2a + c)^2= b^2$

    (vi) যদি $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে kএর মান নির্ণয় করুন ।

    (vii) যদি$px^2+ 2x + 1 = 0$ এবং $x^2+ 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে pএর মান নির্ণয়করুন এবং প্রতিক্ষেত্রে সাধারণ মূলের মান নির্ণয় করুন ।

    (viii) যদি$x^2- ax + b = 0$ এবং $x^2+ bx + a = 0$ $(a \neq b)$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবে প্রমাণ করুন যে, $2x^2+ (a + b)x = (a + b)^2$সমীকরণের সমাধান $x = 1$ এবং $x = -0.5$ হবে।

    (ix) যে শর্তে $px^2 + qx + 1$ এবং $qx^2 + px + 1$ রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ একঘাত উৎপাদক থাকবে তা নির্ণয়করুন।

    (x) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ করুন যে, $x^2 + px + qr = 0, x^2 + qx + pr = 0$ এবং $x^2+ rx + pq = 0$ সমীকরণের প্রতিজোড়ার একটি করে সাধারণ মূল আছে।

    (xi) kএর মান কত হলে $x^2 - kx - 21 = 0$ এবং $x^2 - 3kx + 35 = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকবে।
19. (i) k-এর মান কত হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ রাশি হবে তা নির্ণয় করুন ।

    (ii) xবাস্তব হলে দেখান$3x^2 + 6x + 7$ রাশিটির মান সর্বদাই ধনাত্মক হবে এবং এর সর্বনিম্ন মান কত হবে?

    (iii) xএর বাস্তব মানের জন্য $5x-x^2$রাশিটির সর্বোচ্চ মান নির্ণয়করুনএবং সর্বোচ্চমানের জন্য x এর মান কত?

    (iv) xবাস্তব হলে দেখান যে, $\frac{2x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4x + 3}$ এর মান 1 এবং -7 এর মধ্যে থাকতে পারে না।

পাঠ ৩.১০ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের মূলের আসন্নমান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমীকরণ, মূল, আসন্নমান

মূলপাঠ

বহুপদী সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্ন মান নির্ণয়

(1) বাস্তব মূলের অবস্থান নির্ণয়ঃ $f(x) = 0$ বহুপদী সমীকরণের $f(x)$ ফাংশনে x-এর মান যথাক্রমে দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ওbবসালে,

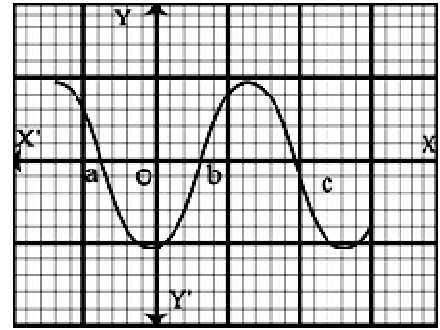
(i) যদি $f(a)$ ও $f(b)$ একই চিহ্নবিশিষ্ট হয় অর্থাৎ, $f(a).\, f(b) > 0$ হয় তাহলে a ওb সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের জোড় সংখ্যক বাস্তব মূল থাকবে কিংবা আদৌ কোন মূল থাকবে না।

(ii) যদি $f(a)$ ও $f(b)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় অর্থাৎ, $f(a).\, f(b) < 0$ হয়; তাহলে aও b সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি মূল বা বিজোড় সংখ্যক মূল থাকবে।

আবার $y = f(x)$ সমীকরণের লেখচিত্র x অক্ষকে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করে, সেই সকল বিন্দুর ভুজের আসন্ন মানই $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান।

(2) লেখের সাহায্যে সমীকরণের মূলের আসন্নমান নির্ণয়

ধরুন প্রদত্ত সমীকরণটি $f(x) = 0$। এখন ছক কাগজে সুবিধামত স্কেল নিয়ে $f(x) = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করুন, যা ধরুনX অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করে। সুতরাং স্পর্শ বিন্দু বা ছেদবিন্দুর ভুজই সমীকরণটির মূল নির্দেশ করে। লেখচিত্র হতে এ মান নির্ণয় করলে সকল ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ সঠিক হয় না এজন্য লেখচিত্র হতে প্রাপ্ত মানগুলো আসন্ন মান হিসেবে বিবেচিত হয়।

লেখচিত্রে দেখা যায় $f(x) = 0$ দ্বারা একটি অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখা সূচিত হয়েছে এবং এর মূলগুলো$x = a, b, c$

(3) দ্বিবিভক্তিকরণ পদ্ধতি

$f(x) = 0$ বহুপদীটিতে $f(a)$ ও $f(b)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তাহলে aও b এর মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের বিজোড় সংখ্যক বা অন্তত একটি মূল থাকবে। এখন ধরুন a ওb এর মধ্যবর্তী মূলটির মান $x_0 = \frac{a+b}{2}$। তাহলে $f(x_0) = 0$ হলে x_0-ই$f(x) = 0$ সমীকরণের মূল। আবার $f(a) < 0, f(b) > 0$ এবং $f(x_0) > 0$ হলে মূলটি aএবং x_0 এর মধ্যে অবস্থান করবে; কিন্তু $f(x_0) < 0$ হলে মূলটি x_0 এবং b এর মধ্যে অবস্থান করবে। আবার যদি aও x_0 এর মধ্যবর্তী মূলটি $x_1 = \frac{a+x_0}{2}$হয়, তাহলে উপরিউক্ত পদ্ধতিতে নির্ধারণ করা হয় যে মূলটি x_0 ও x_1 এর মধ্যে বা aএবং x_1 এর মধ্যে অবস্থান করে। এ পদ্ধতি বারবার প্রয়োগ করে মূলের প্রকৃত মানের অতি নিকটবর্তী আসন্ন মান নির্ণয় করা হয়। এ পদ্ধতিকেই দ্বিবিভক্তিকরণ পদ্ধতি

বলা হয়।

সমস্যা নং - ৩.১	তারিখ:

সমস্যা:দ্বিবিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করুন, $f(x) = 0$ একটি বহুপদী। আবার ধরুন, a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $f(a) < 0, f(b) > 0$ হলে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল a এবং b এর মধ্যে বিদ্যমান। আবার যদি $f(a) > 0$ এবং $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ হয়, তাহলে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূল a এবং $\frac{a+b}{2}$ এর মধ্যে থাকবে। আবার $f(b) < 0$ এবং $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ হলে, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূল $\frac{a+b}{2}$ এবং b এর মধ্যে থাকবে।

কার্যপদ্ধতি:1. $f(x) = x^3 - 4x - 9$ ফাংশনে x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে x এর দুইটি মান 2.7 এবং 2.75 নির্ণয় করুন যাতে $f(2.7)$ এবং $f(2.75)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়। তাহলে সমীকরণটির একটি বাস্তব মূল 2.7 এবং 2.75 এর মধ্যে আছে।

2. অতঃপর $f\left(\frac{2.7 + 2.75}{2}\right)$ অর্থাৎ $f(2.725)$ এর চিহ্ন নির্ণয় করুন এবং $f(2.7)$ এবং $f(2.75)$ এর চিহ্নের সাথে তুলনা করে মূলের অবস্থান নির্ণয় করুন।

3. এ পদ্ধতির বারবার প্রয়োগ করে মূলের এরূপ অবস্থান সীমা নির্ণয় করুন যাতে দশমিকের পর অন্তত পাঁচটি অংক (signifcant digits) থাকে।

4. দশমিকের পর পঞ্চম স্থানের অংকটি পাঁচ অথবা তদপেক্ষা বৃহত্তর হলে দশমিকের পর চতুর্থ স্থানের অংকের সাথে 1 যোগ করে আসন্ন মান নির্ণয় করুন। দশমিকের পর পঞ্চম স্থানের অংকটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হলে চতুর্থ স্থানের অংকের কোন পরিবর্তন না করেই আসন্ন মান নির্ণয় করুন।

ফলসংকলন:ধরুন, $a = 2.7, b = 2.75$ এখন $f(2.7) = -0.117$ এবং $f(2.75) = 0.796875$

যেহেতু $f(2.7) < 0, f(2.75) > 0$ সুতরাং 2.7 এবং 2.75 এর মধ্যে একটি মূল বিদ্যমান

দ্বিবিভক্তিকরণ পদ্ধতি: ১ম আসন্ন মান $x_0 = \frac{a+b}{2} = 2.725$, যেখানে $f(x_0) = 0.334828125$

সুতরাং x_0 এবং a এর মধ্যে একটি বাস্তব মূল রয়েছে।

যেহেতু $f(x_0). f(a) < 0$ $\therefore$ ২য় আসন্ন মান $x_1 = \frac{x_0 + a}{2} = 2.7125$, যেখানে $f(x_1) = 0.107642578$

যেহেতু $f(x_1). f(a) < 0$ $\therefore$ ৩য় আসন্ন মান $x_2 = \frac{x_1 + a}{2} = 2.70625$, যেখানে $f(x_2) = -4.99585 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_2). f(x_1) < 0$ $\therefore$ ৪র্থ আসন্ন মান $x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2} = 2.709375$, যেখানে $f(x_3) = 0.05124998804$

যেহেতু $f(x_3). f(x_2) < 0$ $\therefore$ ৫ম আসন্ন মান $x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = 2.7078125$, যেখানে $f(x_4) = 0.023104236$

যেহেতু $f(x_4). f(x_2) < 0$ $\therefore$ ৬ষ্ঠ আসন্ন মান $x_5 = \frac{x_4 + x_2}{2} = 2.70703125$, যেখানে $f(x_5) = 9.0492367 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_5). f(x_2) < 0$ $\therefore$ ৭ম আসন্ন মান $x_6 = \frac{x_5 + x_2}{2} = 2.706640625$, যেখানে $f(x_6) = 2.0254546 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_6). f(x_2) < 0$ $\therefore$ ৮ম আসন্ন মান $x_7 = \frac{x_6 + x_2}{2} = 2.706445313$, যেখানে $f(x_7) = -1.4855072 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_7). f(x_6) < 0$ $\therefore$ ৯ম আসন্ন মান $x_8 = \frac{x_7 + x_6}{2} = 2.706542969$, যেখানে $f(x_8) = 2.699007 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_8). f(x_7) < 0$ $\therefore$ ১০ম আসন্ন মান $x_9 = \frac{x_8 + x_7}{2} = 2.706494141$, যেখানে $f(x_9) = -6.078181 \times 10^{-3}$

যেহেতু $f(x_9).\,f(x_8) < 0$ $\therefore$ একাদশ আসন্ন মান $x_{10} = \dfrac{x_9 + x_8}{2} = 2.706518555$, যেখানে $f(x_{10}) = -\,1.689636 \times 10^{-4}$

যেহেতু $f(x_{10}).\,f(x_8) < 0$ $\therefore$ দ্বাদশ আসন্ন মান $x_{11} = \dfrac{x_{10} + x_8}{2} = 2.706530762$, যেখানে $f(x_{11}) = -\,5.923938957 \times 10^{-5}$

যেহেতু $f(x_{11}).\,f(x_{10}) < 0$ $\therefore$ ত্রয়োদশ আসন্ন মান $x_{12} = \dfrac{x_{11} + x_{10}}{2} = 2.706524659$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূলের আসন্নমান $x_{12} = 2.70652$

সমস্যা নং - ৩.২	**তারিখঃ**

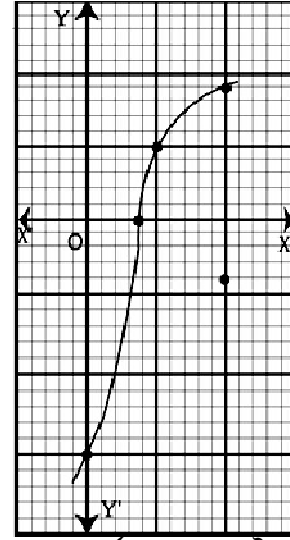
সমস্যা: লেখচিত্র অঙ্কন করে $x^3 - x^2 + 4x - 3 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূলের আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

তত্ত্ব: ধরুন $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3 = 0$ $\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করে বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলোকে সুষমভাবে যোগ করলে বক্ররেখটি X অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুর ভুজই সমীকরণটির মূল নির্দেশ করে।

লেখচিত্রাঙ্কন কার্যপদ্ধতি:

1. x এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $y = x^3 - x^2 + 4x - 3$ সমীকরণ হতে y এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করুন ও (x, y) বিন্দুগুলো নির্ণয় করুন।

2. ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর 3 বর্গবাহু = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর 5 বর্গবাহু = 1 একক স্কেল নির্বাচন করে ছক কাগজে ঐ স্কেলে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করুন। $f(x) = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুর ভুজের আসন্ন মানই বাস্তব মূলের আসন্ন মান।

3. স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযোজন করে লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

স্কেল : ক্ষুদ্র বর্গের 5 ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 একক

ফল সংকলন: $y = x^3 - x^2 + 4x - 3$

x	0	-1	1	2	3
y	-3	-9	1	9	27

পর্যবেক্ষণ ও মন্তব্য: লেখচিত্রটি x অক্ষকে A, বিন্দুতে ছেদ করেছে। A বিন্দুতে $0 < x < 1$, মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করা হল।

মূল্যের আসন্ন মান নির্ণয়ের কার্যপদ্ধতি:

1. 0ও 1 এর মধ্যে xএর ভিন্ন ভিন্ন মান ধরে খুব নিকটবর্তী x এর যে দুইটি মানের জন্য $f(x)$ এর চিহ্ন বিপরীত, তাদের মান হতে x এর বাস্তব মূলের মান এক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

2. এই পদ্ধতি বারবার প্রয়োগ করে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত x এর মান নির্ণয় করুন এবং তা হতে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন।

$x = a$	$x = b$	$f(a)$	$f(b)$	$f(a).\,f(b)$	সিদ্ধান্ত
0.5	1	-1.125	4	$-$ ve	0.5 এবং 1 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান
0.75	0.8	-0.09862	0.072	$-$ ve	0.75 এবং 0.8 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান
0.76	0.8	-0.14062	0.072	$-$ ve	0.76 এবং 0.8 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান
0.76	0.78	-0.09862	-0.138	+ ve	0.76 এবং 0.78 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান নেই

0.77	0.79	– 0.0563	0.289	– ve	0.77 এবং 0.78 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান
0.78	0.79	– 0.138	0.289	– ve	0.78 এবং 0.79 এর মধ্যে মূল বিদ্যমান

$f(.78) < 0, f(.79) > 0$ সুতরাং 0.78 এবং 0.79 এর মধ্যে সমীকরণটির একটি মূলের আসন্নমান 0.785

পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি (Newton-Raphson Method) দ্বারা $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয়

ধরুন $f(x) = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ এবং $y = f(x)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ, যা x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বক্ররেখার $P(x_0, y_0)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন P বিন্দু থেকে OX এর উপর PB লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে $OB = x_0$, $BP = y_0$; আবার, মনে করুন $OT = x_1$

তাহলে P বিন্দুতে $y_0 = f(x_0)$ এবং P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_0 = (x - x_0) f'(x_0)$

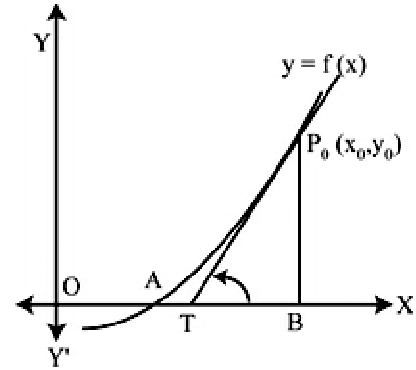
T বিন্দুতে $y = 0, x = x_1 \therefore 0 - y_0 = (x_1 - x_0) f'(x_0)$ বা, $x_1 - x_0 = -\frac{y_0}{f'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \therefore x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0.$

$y = f(x)$ বক্ররেখা x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে; অতএব A বিন্দুতে $y = 0$ বা, $f(x) = 0$

সুতরাং যেহেতু A বিন্দুর ভুজই $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল। এখন A এবং T বিন্দুদ্বয় একে অপরের অতি নিকটে অবস্থান করবে। এখন উপরের সূত্রের সাহায্যে x_0 হতে x_1 নির্ণয় করার পর $x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_{n+1}$ নির্ণয় করুন।

$x_2 = x_2 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, f'(x_1) \neq 0.$, এখানে x_2 কে মূলের পরবর্তীআসন্নমান হিসাবে ধরা হয়েছে।

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, f'(x_2) \neq 0$ একইভাবে $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ এবং $f'(x_n) \neq 0$

সুতরাং পুনরাবৃত্তি পদ্ধতিতে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের আসন্ন মান $= x_n$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. সংশ্লেষণ প্রক্রিয়ায় ভাগফল এবং ভাগশেষ নির্ণয় করুন:
   (i) $4x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ কে $x - 2$ দ্বারা। (ii) $2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 22$ কে $x + 3$ দ্বারা।
2. (i) এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলগুলো যথাক্রমে 2, –2, 3
   (ii) এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলগুলো $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ এর মূলের তিন গুণ।
   (iii) একটি সমীকরণ গঠন করুন যার মূলগুলো $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 0$ এর মূলের বিপরীতের দ্বিগুণ।
   (iv) একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলগুলো $8x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0$ সমীকরণের মূল অপেক্ষা $\frac{1}{2}$ বেশি।
3. যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হয় তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করুন।
   (i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (ii) $\sum \alpha^2\beta$ (iii) $\sum \alpha^2\beta^2$
4. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হয় তবে নিম্নের রাশিগুলোর মান নির্ণয় করুন।

(i) $\sum\frac{1}{a+b}$ (ii) $\sum\frac{1}{a+b-c}$ (iii) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

5. প্রদত্ত শর্তে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর সমাধান করুন:
(i) $x^3-3x^2-x+3=0$ যার মূলগুলো সমান্তর ধারাভুক্ত।
(ii) $x^3+x^2-34x+56=0$ যার একটি মূল অপর মূলের দ্বিগুণ।
(iii) $2x^3+7x^2+4x-3=0$ যার দুইটি মূলের সমষ্টি -2।
(iv) $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$ সমীকরণটি সমাধান করুন যার একটি মূল $-2+\sqrt{3}$
(v) $x^3-5x^2-16x+80=0$ যার দুইটি মূলের যোগফল শূন্য।
(vi) $2x^3-15x^2+37x-30=0$ যার মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।
(vii) $3x^3-26x^2+52x-24=0$ যার মূলগুলো গুণোত্তর ধারাভুক্ত। [সংকেত: মূলগুলো $\frac{\alpha}{k}, \alpha, \alpha k,$]
(viii) $x^3-5x^2-2x+24=0$ যার দুইটি মূলের গুণফল 12.
(ix) $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ যার মূলগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।
(x) $3x^3-26x^2-52x-24=0$ সমীকরণটির মূলগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত হলে মূলগুলো নির্ণয় করুন।

6. $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে এমন সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলগুলো নিম্নরূপ:
(i) $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ (ii) $\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta$ (iii) $\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta$ (iv) $\beta^2+\gamma^2, \alpha^2+\gamma^2, \alpha^2+\beta^2$

7. $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হয় তবে সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলগুলো নিম্নরূপ:
(i) $bc+\frac{1}{a}$, $ca+\frac{1}{b}$, $ab+\frac{1}{c}$ (ii) $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$ (iii) $\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$

8. $x^3+ax+b=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হয় তবে এমন সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলগুলো নিম্নরূপ:
(i) $(\alpha+\beta-\gamma), (\beta+\gamma-\alpha), (\gamma+\alpha-\beta)$ (ii) $\beta\gamma\alpha\gamma, \alpha\beta$ (iii) $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2, (\alpha-\beta)^2$
(iv) $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ (v) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{g}$, $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$ (vi) $\frac{b+g}{a^2}$, $\frac{a+b}{g^2}$, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$

9. (i) একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার মূলগুলো $2x^3-5x^2+7x+10=0$ সমীকরণের মূল অপেক্ষা 1 করে বেশি।
(ii) $x^3-x-1=0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হলে $\frac{1+a}{1-a}, \frac{1+b}{a-b}$, $\frac{1+c}{1-c}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

10. (i) মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত হলে $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$ কে সমাধান করুন ।
(ii) $x^4+x^3-16x^2-4x+48=0$ এর দুইটি মূলের গুণফল 6 হলে সমীকরণটি সমাধান করুন ।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

11. k এর মান কত হলে $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?
(ক) 3, 2 (খ) 3, –2 (গ) –3, 2 (ঘ) –3, –2

12. $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের দুইটি মূল যদি সমান হয় এবং অপর সমীকরণ $x^2+ax+8=0$ এর একটি মূল যদি 4 হয়, তবে b এর মান কত?
(ক) 4 (খ) 8 (গ) 9 (ঘ) 12

13. যদি $x^2+x+4=0$ সমীকরণের মূল α এবং β হয়, তবে $\alpha-\beta=?$
(ক) ± 16 (খ) $\pm\sqrt{-15}$ (গ) $\pm\sqrt{-20}$ (ঘ) $\pm\sqrt{15}$

14. $x^2-5x-3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1, x_2 হলে $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কি?
(ক) $3x^2-5x+1=0$ (খ) $5x^2+x-3=0$ (গ) $3x^2+5x-1=0$ (ঘ) $5x^2-x-3=0$

15. $x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হলো–
(ক) $x^2+x+7=0$ (খ) $x^2-x-7=0$ (গ) $x^2+x-7=0$ (ঘ) $x^2-x+7=0$

সৃজনশীল প্রশ্ন

16. $f(x)=x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় –2, 6 হলে

(ক) p, q এর মান নির্ণয় করুন।
(খ) যদি $f(x) = r$হয়, তবে rএর কোন মানের জন্য সমীকরণটির কোনো বাস্তব মূল থাকবে না।
(গ) $p + 2$ এবং $q - 2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

17. $x^2 - 5x + 13 = (x - p)^2 + q^2$ হলে
(ক) pএবংq এর মান নির্ণয় করুন।
(খ) $x^2 - 5x + 13$ এর সর্ব নিম্নমান নির্ণয় করুন।
(গ) $x^2 - 5x + 13$ বক্ররেখাটি স্কেচ করুন।

18. $x^3 + px + q = 0$ হলে
(ক) সমীকরণটির মূল এবং সহগের মধ্যকার সম্পর্ক লিখুন।
(খ) যদি প্রদত্ত সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γহয় তাহলে $\frac{1}{\alpha + \beta}, \frac{1}{\beta+\gamma}, \frac{1}{\gamma+\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(গ) মান নির্ণয় করুন: $\frac{\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha}$

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৯

1. (a) (i) অভেদ (ii) অভেদ
(b) (i) জটিল, অসমান(ii) জটিল ও অসমান (iii) অসমান ও অমূলদ (iv) জটিল ও অসমান।
2. (i) (ক)$k<\frac{9}{16}$ (খ)$k = \frac{9}{16}$ (গ)$k>\frac{9}{16}$
(ii) (ক)$k> 85, k< 1$; (খ)$k = 85$ বা, (গ) $1 <k< 85$
(iii)10 বা, 2;
7. (i) $14 >k> 2$ (iii) 2 এবং -2 এর মধ্যে।
9. (ii)$k = 0$ 3; 10. (i) $2, \frac{1}{2}$
11. (iv)45, 1.5, 15, (v) 9, (vi) 4 বা 1 (vii) ± 8 (xi) 6 বা -1;
12. (ii) $\frac{p^4}{q - 2 (2p^2-q)}$ (iii) $\frac{-5}{4}$ (v) $\frac{(p^4 - 4p^2q + 2q^2)}{q^4}$;
13. (ix) $-\frac{2}{p}, -\frac{2}{q}$;
14. (i) $ax^2 + (2a + b) x + a + b + c = 0$ (ii) $acx^2 + b (a + c) x + a^2 + b^2 + c^2 - 2ac = 0$;
(iii) $(25ac - 4ab^2) x^2 - 3abx + a^2 = 0$ (iv) $2a\sqrt{a}\, x^2+(b\sqrt{a} -2a\sqrt{c}\,) x-b\sqrt{c} = 0$;
(v) $c^3x^2 + b (b^2 - 3ac) x + a^3 = 0$;
15. $x^2 - 10x + 9 = 0$
16.(i) $x^2 - 6x + 4 = 0$; (ii) $x^2- 6x + 11 = 0$; (iii) $11x^2 - 6x + 1 = 0$
(iv) $2x^2 - 6x + 7 = 0$ (v)$x^2 + 4x - 1 = 0$;
17. (i) $x^2 - 2 (a + b) x + 4ab = 0$, **(ii)**$x^2 \pm 4x + 4 = 0$;
18.**(ii)**$a (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$; (vi) 0, 3, 8 (vii) -3, 1 এবং 1, -1; (ix) $1 + p + q = 0$
19.(i) $k = 3, -2$; (ii) 4; (iii) $\frac{25}{4}$, (v) $5, \frac{1}{5}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. (i)$4x^3 + 15x^2 + 27x + 52$, 117. (ii) $2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 12$, -58;
2. (i)$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ (ii) $x^4 + 6x^3 + 27x^2 + 108x + 405 = 0$
   (iii) $x^4 - x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$; (iv) $4x^3 - 8x^2 + 8x - 3 = 0$
3. (i) $p^2 - 2q$ (ii) $3r - p$ (iii) $q^2 - 2pr$
4. (i) p/q (ii) $p/2q$(iii) $8\,q$,
5. (গ) (i) $-1, 1, 3$. (ii) $2, 4, -7$ (iv) $-2 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i6$; (v) $-4, 4, 5$; (vii) $2/3, 2, 6$;
   (viii) $4, 3, -2$; (ix) $-4, -1, 2, 5$; (x) $2/3, 2, 6$;
6. (i)$x^3 + px^2 + qx + 8r = 0$; (ii) $x^3 - qx^2 + p^2x - r^2 = 0$; (iii) $x^3 + 2px^2 (p^2 + q)\, x + (pq - r) = 0$;
   (iv) $(p^2 - 2q - x)^3 + (2p - p^2)(p^2 - 2q - x)^2 + (q^2 - 2pr)(p^2 - 2q - x) - r^2 = 0$;
7. (i)$rx^3 - q(r+1)\, x^2 + p\,(r+1)^2x - (r+1)^3 = 0$ (ii) $(r - pq)\, x^3 + (3r - 2pq + p^3)\, x^2 + (3r - pq)\, x + r = 0$
   (iii) $(4pq - p^3 - 8r)\, x^3 + (4pq - q^3 - 12r)\, x^2 + (pq - 6r)\, x - r = 0$;
8. (i)$x^3 + 4ax - 8b = 0$ (ii)$x^3 - ax^2 - b^2 = 0$ (iii) $x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 4a^3 + 27b^2 = 0$.
   (iv) $x^3 + ax - b = 0$. (v)$b^2x^3 + 2abx^2 + a^2x - b = 0$;
   (vi) $bx^3 - ax^2 - 1 = 0$ (vii) $bx^3 + a\,(1 - b)x^2 + (1 - b)^3 = 0$
   (viii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$, (ix) $x^3 + 2ax^2 + a^2x - b^2 = 0$,
9. (i)$2x^3 - 11x^2 + 23x - 4 = 0$, (ii) $x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0$,
10. (i) 8/9, 4/3, 2, 3 (ii) $\pm 2, 3, -4$
11. খ 12. গ 13. খ 14. গ 15. খ